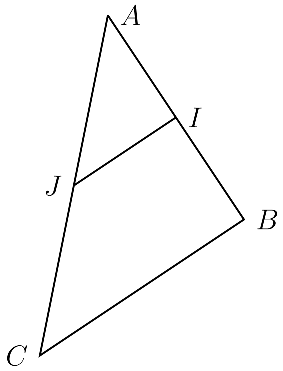
Exercice 1 (Théorèmes de Pythagore et propriété des droites des milieux)

1. ABC est un triangle rectangle en B tel que : AB = 6 et AC = 10.

   a. Déterminer la longueur BC.

   b. Les points I et J sont milieux respectifs des segments [AB] et [AC].

   Déterminer la longueur IJ.



2. Un triangle a pour côté 4,5; 6; et 7,5.

   Est-ce un triangle rectangle? Justifier votre réponse.

Exercice 2 (Nombre rationnel et équation)

1. Compléter les phrases suivantes par $\in$ et $\notin$:

   a. $-4\ldots\mathbb{N}$;
   b. $23\ldots\mathbb{Z}$;
   c. $\frac{3}{7}\ldots\mathbb{D}$;
   d. $3\ldots\mathbb{Q}$;
   e. $\frac{19}{200}\in\mathbb{Z}$;
   f. $10\in\mathbb{Z}$;
   g. $-\frac{25}{11}\ldots\mathbb{Q}$;
   h. $-\frac{5}{1000}\ldots\mathbb{D}$;
   i. $7{,}31\ldots\mathbb{N}$.

2. Effectuer les opérations suivantes :

   a. $A = 5\left(\frac{10}{3}-\frac{8}{5}\right)+2\left(\frac{3}{7}+\frac{4}{63}\right)$;

   b. $B = \left(\frac{-4}{5}\right)^3\times\left(\frac{7}{3}\right)^2\times\left(\frac{5^2}{7}\right)^{-2}$.

3. Un père a 29 ans, son fils a 5 ans.

   Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le triple de l'âge du fils?

Exercice 3

ABC est un triangle rectangle en A tel que : AB = 3, et AC = 2.
Calculer BC.

Exercice 4 (Nombres irrationnels)

ABC est un triangle isocèle rectangle A tel que : AB = 1.

1. Calculer BC^2.
2. Peux-tu trouver la valeur de BC?
3. Construire sur une autre figure un segment de même longueur que BC.
4. On désigne par D un point tel que le triangle BCD soit rectangle en B et BD = 1.

   a. Calculer BD^2.

   b. Peux-tu trouver la valeur de BD.

   c. Construire sur une autre figure un segment de même longueur que DC.

Exercice 5 (Nombres réels)

1. Ecrire chacun des nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a est un entier relatif et b un entier naturel le plus petit possible : $\sqrt{24}$, $\sqrt{275}$, $-\sqrt{128}$ et $-2\sqrt{28}$.
2. Ecrire plus simplement les nombres suivantes.

   - $A = 3\sqrt{75}-7\sqrt{27}+4\sqrt{42}$;
   - $B = (7-11\sqrt{2})(7+11\sqrt{2})$;
   - $C = (12-4\sqrt{3})^2$;
   - $D = (8\sqrt{3}+5\sqrt{11})(15\sqrt{6}-10\sqrt{3})$.

3. Donner la valeur absolue de chacun des nombres suivants : $3\sqrt{2}$, $-3+\sqrt{2}$, $-\frac{2\sqrt{3}}{5}$ et $4\sqrt{3}-7\sqrt{5}$.

4. Ecrire sans radical au dénominateur les nombres suivants : $\frac{3-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}$, $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$ et $-\frac{4\sqrt{2}-1}{3\sqrt{3}-4}$.

Exercice 6 (Nombres réels et valeur absolue)
On considère les nombres suivantes :
$a=\sqrt{25(97+56\sqrt{3})}-3\sqrt{97-56\sqrt{3}}-15$;
$b=2\sqrt{\sqrt{25}+23}+\frac{1}{2}\sqrt{700}+\sqrt{1764}+\sqrt{49}-5\sqrt{175}+8-\sqrt{7}$

1. a. Vérifier que $(4\sqrt{3}-7)^2=97-56\sqrt{3}$ et $(4\sqrt{3}+7)^2=97+56\sqrt{3}$.
   b. Etudier le signe des nombres suivants : $4\sqrt{3}-7$ et $4\sqrt{3}+7$.
   c. Sachant que pour un nombre réel x, on a : $\sqrt{x^2}=|x|$, calculer $\sqrt{97-56\sqrt{3}}$ et $\sqrt{97+56\sqrt{3}}$.
   d. En déduire une écriture plus simple de a.
2. Ecrire plus simplement b.
3. Ecrire $\frac{a}{b}$ sans radical au dénominateur.

Exercice 7 (Comparaison de nombres réels)
Considérons les nombres suivants :

- $x=(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})-\sqrt{112}+\sqrt{28}$;
- $y=(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{2}-5)(\sqrt{2}+5)$;
- $z=-14+2\sqrt{14}$.

1. a. Ecrire plus simplement x et y.
   b. Calculer xz et $\frac{x}{y}$.
2. a. Etudier le signe de x et y.
   b. Calculer x^2 et y^2.
   c. En déduire la comparaison de x et y.
3. Sachant que $1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415$ et $2{,}645<\sqrt{7}<2{,}646$, donner un encadrement de x, y et $\frac{x}{y}$ par deux nombres décimaux d'ordre 2.

Exercice 8 (Comparaison et valeur absolue)
On considère les nombres suivants.

- $x=2+\sqrt{3}$;
- $y=2-\sqrt{3}$;
- $a=\sqrt{193+72\sqrt{7}}-\sqrt{193-72\sqrt{7}}+\sqrt{44+16\sqrt{7}}$;
- $b=2x^6\cdot y^4$.

1. a. Justifier que les nombres x et y sont inverses l'un de l'autre.
   b. En déduire que $b=14+8\sqrt{3}$.
2. a. Calculer $(9-4\sqrt{7})^2$, $(9+4\sqrt{7})^2$ et $(-4-2\sqrt{7})^2$.
   b. Étudier le signe des nombres $9-4\sqrt{7}$, $9+4\sqrt{7}$ et $-4-2\sqrt{7}$.
   c. En déduire que $a=430+16\sqrt{7}$.
3. Comparer a et b.
   On pourra comparer d'abord $16\sqrt{7}$ et $8\sqrt{3}$.
4. Donner un encadrement par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 2 des nombres a, b, $a-b$, ab et $\frac{a}{b}$ sachant que $1{,}732<\sqrt{3}<1{,}733$ et $2{,}645<\sqrt{7}<2{,}646$.

Exercice 9 (Inéquation et intervalle)

1. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ puis représenter chaque ensemble de solutions sur une droite graduée.
   - (I_1) : $4x-1\geq 6-2x$;
   - (I_2) : $3(x-1)+4x+3>8x-2$;

- $(I_3) : (\sqrt{2}-1)x - \frac{1}{3} \leq -x + \frac{5}{3}$.

2. a. Comparer les nombres réels $\frac{7}{6}$ et $\sqrt{2}$.

   b. Donner l'ensemble des solutions commune aux inéquations (I_1) et (I_2) puis (I_2) et (I_3). Représenter chaque ensemble de solutions sur une droite graduée.

Exercice 10 (Intersection et réunion d'intervalles)
On considère les intervalles : $I_1 = [2{,}9[$, $I_2 =]\leftarrow, 3]$ et $I_3 = \left]-\frac{4}{3}, \rightarrow\right[$.

1. Trouver et représenter les intervalles suivants : $I_1 \cap I_2$, $I_2 \cap I_3$, $I_1 \cap I_3$, $I_1 \cup I_2$, $I_2 \cup I_3$ et $I_1 \cup I_3$.

2. Soit x un nombre réel. Traduire par des inéquations les affirmations suivantes : $x \in I_1$, $x \in I_2$, $x \in I_3$ et $x \in I_1 \cap I_3$.

Exercice 11 (Calcul littéral et équation dans $\mathbb{R}$)
On considère les expressions suivantes :

- $A(x) = 16x^2 - 40x + (8x-10)(10x-8) + 25$;

- $B(x) = (2x-1)^2(x-\sqrt{2}) - (2-x^2)(8x^2-8x+2)$;

- $C(x) = x(49+14x+x^2) - (x^2+7x)(2x-3)$;

- $D(x) = (x-1)^2 - 2(x-1)(2x+3) + (4x^2+12x+9)$;

- $E(x) = (x-3)^3(3x+1) + (3-x)(3x+1)^2$.

1. Développer et réduire, suivant les puissances décroissantes de x, les expressions $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ et $E(x)$.

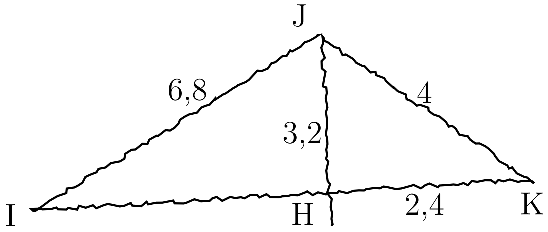
2. Factoriser les expressions $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ et $E(x)$.

3. Calculer $A(1)$, $B(0)$, $C(\frac{2}{3})$, $D(\sqrt{2})$ et $E(\sqrt{3})$.

4. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes : $A(x) = 0$, $B(x) = 0$, $C(x) = 0$, $D(x) = 0$ et $E(x) = 0$.

Exercice 12 (Calcul de longueurs)
On considère la figure ci-contre dessinée à main levée.

L'unité utilisée est le centimètre.
Les points I, H et K sont alignés.



1. Construire la figure ci-dessus en vraie grandeur.

2. Démontrer que les droites (IK) et (JH) sont perpendiculaires.

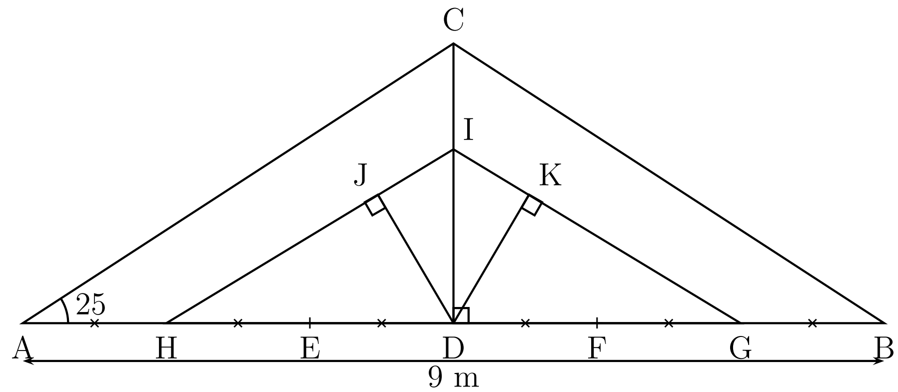
3. Démontrer que IH = 6 cm.

4. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{HJK}$, arrondie au degré.

5. La parallèle à (IJ) passant par K coupe (JH) en L. Compléter la figure.

6. Expliquer pourquoi $LK = 0{,}4 \times IJ$.

Exercice 13 (Calcul de longueurs)
Un charpentier doit réaliser pour un de ses clients la charpente dont il a fait un schéma ci-dessous :



Il ne possède pas pour le moment toutes les dimensions nécessaires pour la réaliser mais il sait que :

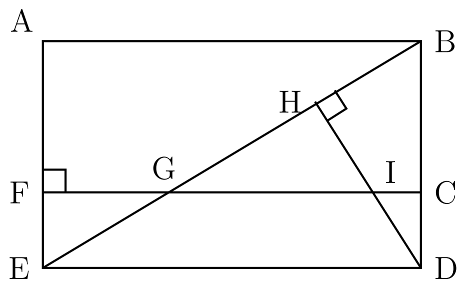
• la charpente est symétrique par rapport à la poutre [CD],

• les poutres [AC] et [HI] sont parallèles.

Vérifier les dimensions suivantes, calculées par le charpentier au centimètre près.

1. Démontrer que hauteur CD de la charpente est égale à 2,10 m.
2. Démontrer, en utilisant la propriété de Pythagore, que la longueur AC est égale à 4,97 m.
3. Démontrer que la longueur DI est égale à 1,40 m.
4. Proposer deux méthodes différentes pour montrer que la longueur JD est égale à 1,27 m. On ne demande pas de les rédiger mais d'expliquer la démarche.

Exercice 14 (Calcul de longueurs)
ABDE est un rectangle. On donne : HB $= \frac{8}{5}cm$, EF=$1cm$ et mes$\widehat{AEB} = 60°$.

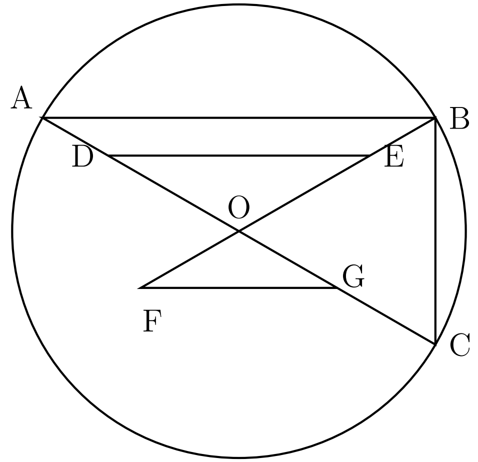


1. a. Justifier que les triangles ABE et HBD sont semblables.

   b. Donner alors la mesure de l'angle $\widehat{HDB}$.

2. Calculer HD, AE, AB, EH, EG.
3. Justifier que les droites (FC) et (ED) sont parallèles.
4. Calculer FG, GI, IC.

Exercice 15 (Angles inscrits et calcul de longueurs)
L'unité de mesure est le mètre.
On considère la figure ci-dessous.



On donne :
OA $= \sqrt{30 - 10\sqrt{5}} + \sqrt{30 + 10\sqrt{5}}$
OE $= \frac{1}{2}\left(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)^2$
DE $= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$
Les droites (AB), (DE) et (GF) sont parallèles.

1. a. Citer trois angles inscrits dans le cercle ci-dessus et préciser les angles au centre qui les sont associés.

   b. Justifier que le triangle ABC est rectangle en B.

2. a. Calculer $(5-\sqrt{5})^2$ et $(5+\sqrt{5})^2$.

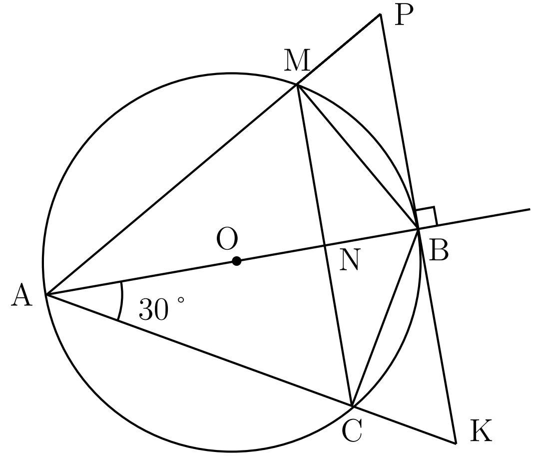
   b. Étudier le signe des nombres suivants : $5-\sqrt{5}$ et $5+\sqrt{5}$.

   c. En déduire le rayon du cercle.

3. Calculer les longueurs OE, DE, OF, AB et BC.
4. Justifier que les triangles BOA et FOG sont semblables puis calculer le rapport de similitude k du triangle BOA au triangle FOG.
5. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC et donner encadrement de $\mathscr{A}$ sachant que $\sqrt{7} \in]2{,}64; 2{,}65[$.

Exercice 16 (Angles inscrits et calcul de longueurs)
On considère la figure ci-dessous.

- $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre O et de rayon 5 dam.
- $AN = 7{,}5\ dam$
- Les arcs $\overset{\frown}{MB}$ et $\overset{\frown}{BC}$ ont la même longueur.



1. a. Citer cinq angles inscrits dans le cercle $(\mathscr{C})$ et l'angle au centre associé à chacun d'eux.

   b. Justifier que le triangle ABC est rectangle. Déterminer BC et AC.

   c. Déterminer mes$\widehat{BOC}$ et mes$\widehat{OBC}$.

   d. Déterminer mes$\widehat{BCO}$ puis donner la nature du triangle OCB.

   e. Justifier que les angles $\widehat{MAC}$ et $\widehat{MBC}$ d'une part, puis les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ACB}$ d'autres part, sont supplémentaires.

2. a. Justifier que mes$\widehat{BAC}$ = mes$\widehat{CBK}$.

   b. Justifier que les triangles ABC et BCK sont semblables et calculer le rapport de similitude k du triangle ABC au triangle BCK.

3. a. Justifier que le point C est le projeté orthogonal du point B sur la droite (AK).

   b. En déduire les longueurs AK et BK.

   c. Justifier que les droites (NC) et (BK) sont parallèles.

Exercice 17 (Construction de droites dans un repère)
Le plan est muni du repère orthonormé (O,I,J).

1. Tracer la droite passant par les points $A(-1{,}0)$ et $B(2{,}1)$.
2. Donner les coordonnées de trois points de la droite (AB) autres que les points A et B.

   La relation $x-3y+1=0$ permet de donner les coordonnées de tous les points de la droite (AB)*. Cette relation est appelé équation cartésienne de la droite* (AB).
3. Tracer les droites d'équation : $3x-2y-1=0$, $x+y=0$, $2x-3=0$ et $2y-4=0$.

Exercice 18 (Equation réduite d'une droite) 1. Dans chacun des cas suivants, écrire l'équation cartésienne de la droite $(\mathscr{D})$ sous la forme $y = ax+b$ avec a et b deux réels.

a. $(\mathscr{D}) : 3x-2y-1=0$;

b. $(\mathscr{D}) : 2x-4y+3=0$;

c. $(\mathscr{D}) : y+1=0$.

L'équation $y = ax+b$ est appelé équation réduite de la droite $(\mathscr{D})$, a est le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine.

2. Donner l'équation réduite de la droite $(\mathscr{D})$ passant par les points A et B dans chacun des cas suivants.

a. $A(2,-1)$ et $B(1,1)$;

b. $A(0,0)$ et $B(1,0)$;

c. $A(2,2)$ et $B(1,-1)$.

Exercice 19 (Droites et vecteurs du plan)
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). On donne trois points $A(-1,2)$, $B(-2,-1)$ et $C(5,0)$ de ce plan.
On fera une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

1. Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. En déduire la nature du triangle ABC.

2. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (AB).

3. On désigne par E le point de couple de coordonnées (2,1).

   a. Que peut-on dire des points A, E et C ?Justifier votre réponse.

   b. Déterminer l'équation réduite de la droite $(\mathscr{D})$ passant par le point E et parallèle à la droite (AB).

   c. On désigne par $F(a,b)$ le point d'intersection des droites $(\mathscr{D})$ et (AB). Déterminer le couple de coordonnées de F.

4. Déterminer les distances suivantes : AB, d(A,C) et $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|$.

5. a. En utilisant la propriété de Thalès, calculer EF.

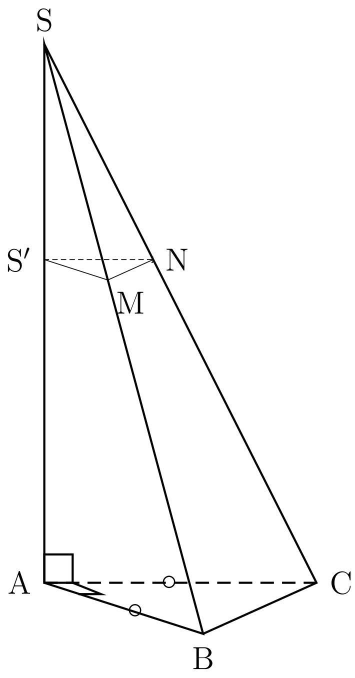
   b. Le point H est le projeté orthogonal de E sur la droite (BC). Calculer les longueurs EH, FH, et HC.

   c. Calculer $\sin\widehat{FEH}$ puis donner la mesure de l'angle $\widehat{FEH}$ à l'unité près.

   d. Justifier que les triangles ABC et EFH sont semblables puis calculer le rapport de similitude de triangle ABC au triangle EFH. En déduire, sans effectuer de calcul, la mesure $\widehat{ACB}$.

Exercice 20 (Pyramide)
La dernière bouteille de parfum de chez Chenal a la forme d'une pyramide SABC à base triangulaire de hauteur [AS] telle que :

- ABC est un triangle rectangle et isocèle en A;
- AB = 7,5 cm et AS = 15 cm.



1. Calculer le volume de la pyramide SABC. (On arrondira au cm^3 près.)
2. Pour fabriquer son bouchon SS′MN, les concepteurs ont coupé cette pyramide par un plan P parallèle à sa base et passant par le point S′ tel que SS′ = 6 cm.

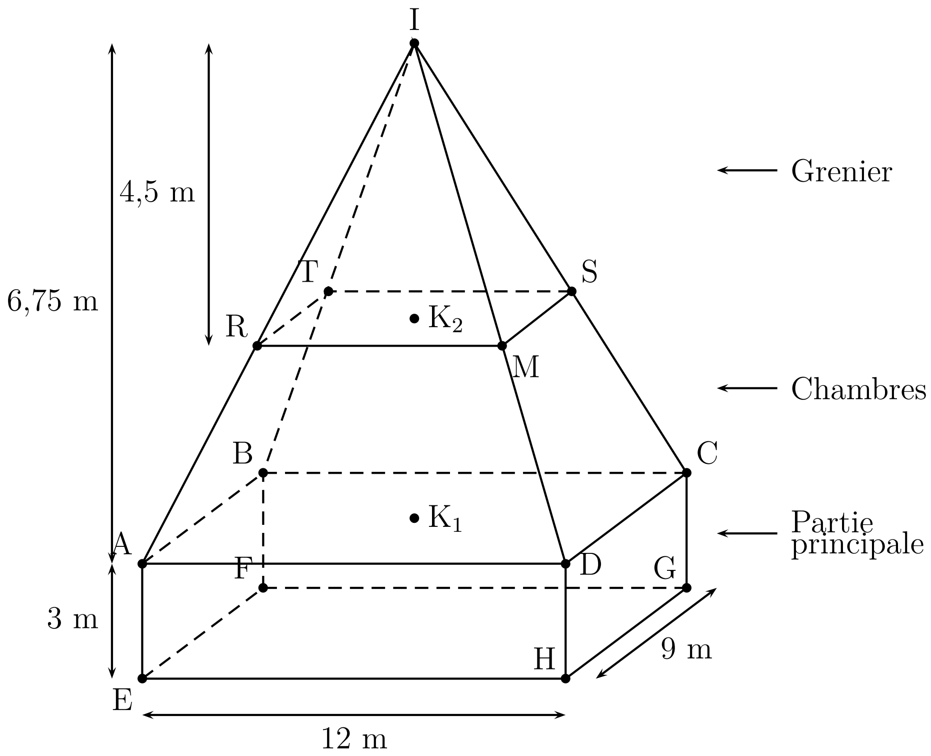
   a. Quelle est la nature de la section plane S′MN obtenue ?

   b. Calculer la longueur S′N.
3. Calculer le volume maximal de parfum que peut contenir cette bouteille en cm^3.

Exercice 21 (Pyramide)
Une maison est composée d'une partie principale qui a la forme d'un pavé droit ABCDEFGH surmonté d'une pyramide IABCD de sommet I et de hauteur $[IK_1]$ perpendiculaire à la base de la pyramide.
Cette pyramide est coupée en deux parties :

- Une partie basse ABCDRTSM destinée aux chambres;
- Une partie haute IRTSM réduction de hauteur $[IK_2]$ de la pyramide IABCD correspondant au grenier.

On a : EH = 12 m; AE = 3 m; HG = 9 m; IK_1 = 6,75 m et IK_2 = 4,5 m.
La figure donnée n'est pas à l'échelle.



1. Calculer la surface au sol de la maison.

2. Des radiateurs électriques seront installés dans toute la maison, excepté au grenier.

   On cherche le volume à chauffer de la maison.

   On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par :

$$V_{\text{pyramide}} = \frac{\text{Aire de la Base} \times \text{Hauteur}}{3}$$

   a. Calculer le volume de la partie principale.

   b. Calculer le volume des chambres.

   c. Montrer que le volume à chauffer est égal à 495 m^3.

3. Un expert a estimé qu'il faut dans cette maison une puissance électrique de 925 Watts pour chauffer 25 mètres cubes.

   Le propriétaire de la maison décide d'acheter des radiateurs qui ont une puissance de 1800 watts chacun et qui coûtent 349,90 $ pièce.

   Combien va-t-il devoir dépenser pour rachat des radiateurs ?

Exercice 22 (Applications affines)
Le poids d'un corps sur un astre dépend de la masse et de l'accélération de la pesanteur.
On peut montrer que la relation est $P = mg$,
P est le poids (en Newton) d'un corps sur un astre (c'est-à-dire la force que l'astre exerce sur le corps),
m la masse (en kg) de ce corps,
g l'accélération de la pesanteur de cet astre.

1. Sur la terre, l'accélération de la pesanteur de la Terre g_T est environ de 9,8. Calculer le poids (en Newton) sur Terre d'un homme ayant une masse de 70 kg.

2. Sur la lune, la relation $P = mg$ est toujours valable.

   On donne le tableau ci-dessous de correspondance poids-masse sur la Lune :

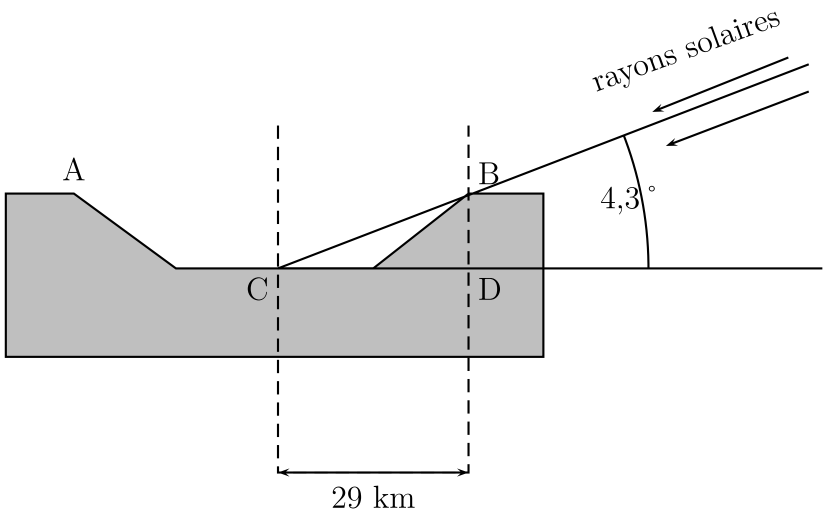
Masse (kg)	3	10	25	40	55
Poids (N)	5,1	17	42,5	68	93,5

   a. Est-ce que le tableau ci-dessus est un tableau de proportionnalité ?

   b. Calculer l'accélération de la pesanteur sur la lune noté g_L

   c. Est-il vrai que l'on pèse environ 6 fois moins lourd sur la lune que sur la Terre ?

3. Le dessin ci-dessous représente un cratère de la lune. BCD est un triangle rectangle en D.



a. Calculer la profondeur BD du cratère. Arrondir au dixième de km près.

b. On considère que la longueur CD représente 20 % du diamètre du cratère. Calculer la longueur AB du diamètre du cratère.

Exercice 23 (Statistique)
Un professeur de SVT demande aux 29 élèves d'une classe de sixième de faire germer des graines de blé chez eux.
Le professeur donne un protocole expérimental à suivre :

- mettre en culture sur du coton dans une boîte placée dans une pièce éclairée, de température entre 20 °et 25 °C ;
- arroser une fois par jour ;
- il est possible de couvrir les graines avec un film transparent pour éviter l'évaporation de l'eau.

Le tableau ci-dessous donne les tailles des plantules (petites plantes) des 29 élèves à 10 jours après la mise en germination.

Taille en cm	0	8	12	14	16	17	18	19	20	21	22
Effectif	1	2	2	4	2	2	3	3	4	4	2

1. Combien de plantules ont une taille qui mesure au plus 12 cm ?
2. Quel est le mode de cette série ?
3. Calculer la moyenne de cette série. Arrondir au dixième près.
4. On considère qu'un élève a bien respecté le protocole si la taille de la plantule à 10 jours est supérieure ou égale à 14 cm.

   Quel pourcentage des élèves de la classe a bien respecté le protocole ?