Chapitre 1

Dénombrement

1.1 Ensemble fini

Définition 1.1.1. On appelle **ensemble fini** tout ensemble dont on peut connaître le nombre d'éléments.
Le nombre n d'éléments d'un ensemble fini E est appelé le **cardinal de E** et noté **Card(E)**.
Par convention, l'ensemble vide ϕ est fini et Card$\phi = 0$.

Exemple 1.1.1.1. On donne : $A = \{0, 2, 5, 14, 78\}$ et $B = \{1, 2, 3, 5, 10, 14, 15, 19, 20, 47\}$. A et B sont des ensembles finis tels que Card(A)= 5 et Card(B)=10.

Propriété 1.1.1. Soit A et B deux ensembles finis. On a :

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B).$$

Exemple 1.1.1.2. A partir de l'exemple 1.1.1.1 précédent, écrire les ensembles $A \cap B$ et $A \cup B$ puis déterminer $Card(A \cup B)$.

1.2 Produit cartésien

Définition 1.2.1.
- E et F étant deux ensembles non vides, on appelle **produit cartésien de E par F**, l'ensemble notée $E \times F$ (se lit E croix F) et définie par :

$$E \times F = \{(x, y) | x \in E, y \in F\}.$$

- D'une manière générale, si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont n ensembles non vides ($n \geq 2$), alors

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n\}.$$

  Les éléments de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ sont des listes d'éléments des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

Exemple 1.2.1.1. On considère les ensembles : $E = \{0, 1, 2, 13, 47, 51, 60, 67\}$ et $F = \{-1, 0, 1, 9, 10, 11\}$.
1-Donner deux éléments de chacun des ensembles suivants : $E \times E$, $E \times F$, $F \times E$ et $E \times F \times E$.
2-Les éléments (0, 1) et (1, 0) respectives des ensembles $E \times F$ et $F \times E$ sont-ils les mêmes ?

Propriété 1.2.1.
- E et F sont deux ensembles finis non vides. On a :

$$Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F).$$

- Plus généralement, si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont n ensembles non vides ($n \geq 2$), alors

$$Card(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = Card(E_1) \times Card(E_2) \times \cdots \times Card(E_n).$$

- Si E est un ensemble fin non vide de cardinal n et p un nombre entier naturel. Alors $Card(E^p) = n^p$ avec $E^p = E \times E \times \cdots \times E$.

Exemple 1.2.1.2. A partir de l'exemple 1.2.1.1, déterminer le cardinal de chacun des ensembles : $E \times E$, $E \times F$, $F \times E$ et $E \times F \times E$.

1.3 Dénombrement des p-listes

Définition 1.3.1. E est un ensemble non vide et p un nombre entier naturel non nul. On appelle **p-listes** d'éléments de E tout éléments de l'ensemble E^p.

Exemple 1.3.1.1. On pose : $A = \{1, 3, 5, 7\}$.
–Donner deux exemples de 6-listes d'éléments de A.
– Les 3-listes $(3, 5, 7)$ et $(7, 5, 3)$ sont-elles différentes ?

Propriété 1.3.1. Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un nombre entier naturel non nul. Alors le nombre de p-listes d'éléments de E est n^p.

Exemple 1.3.1.2. A partir de l'exemple précédent, donner le nombre de 3-listes d'éléments de A possibles.

Exercice 1.3.1.

1.4 Dénombrement des p-arrangements

Définition 1.4.1. Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$. On appelle **p-arrangement** d'éléments de E toute p-liste d'éléments deux à deux distincts de E.

Exemple 1.4.1.1. On pose : $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
– La 3-listes $(3, 0, 3)$ n'est pas un 3-arrangement d'éléments de A car l'élement 3 se répète dans cette liste.
– $(2, 1, 4)$ est un 3-arrangement d'éléments de A. Donner deux exemples de 4-arrangement d'éléments de A.

Propriété 1.4.1. Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier tel que : $1 \leq p \leq n$. Le nombre de p-arrangement d'éléments de E est le nombre A_n^p (se lit A, n, p) défini par :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1).$$

Exemple 1.4.1.2. A partir de l'exemple précédent, donner le nombre de 3-arrangements d'éléments A.

Notation. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note : $n! = A_n^n$.
$n!$ est la factorielle de n.
Par convention, $0! = 1$. □

Propriété 1.4.2. Soit n et p deux nombres entiers tels que : $1 \leq p \leq n$. On a :

$$n! = n(n-1)! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exercice 1.4.1. Le bureau d'une association comprend un président, un secrétaire, et un trésorier choisis parmi les 27 membres de l'association. Combien de bureaux peut-on former ?

1.5 Dénombrement des p-combinaisons

Définition 1.5.1. Soit E un ensemble non vide. Un sous-ensemble de E est un ensemble dont tous les éléments sont dans E.

Exemple 1.5.1.1. On pose : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. 1, 3, 5, 6 est un sous ensemble de A. Donner deux exemples de sous-ensembles de A.

Définition 1.5.2. Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier naturel tel que : $0 \leq p \leq n$. On appelle p-combinaison d'éléments de E, tout sous-ensemble de p éléments de E.

Exemple 1.5.2.1. On donne : $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.
–Une 3-combinaison d'éléments de A est $\{1,5,8\}$.
–Donner deux exemples de 4-combinaisons de A.
– Les deux 5-combinaisons d'éléments de A suivantes : $\{1,2,3,4,5\}$ et $\{5,4,2,1,3\}$ sont-elles différentes ?

Propriété 1.5.1. Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier tel que : $0 \leq p \leq n$. Le nombre de p-combinaisons d'éléments de E est le nombre noté C_n^p (se lit C, n, p) et défini par :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{n!}.$$

On a : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Exemple 1.5.2.2. A partir de l'exemple précédent, déterminer le nombre de 5-combinaisons d'éléments de A.

Propriété 1.5.2. Soit n et p des nombres entiers naturels tels que : $0 \leq p \leq n$. On a :

- $C_n^0 = 1, C_n^n = 1, C_n^1 = n$
- $C_n^p = C_n^{n-p}$
- $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

1.6 Problèmes de dénombrement

L'essentiel

Soit n et p deux entiers naturels.

1. Le nombre de manières de choisir p objets parmi n objets

   Soit N le nombre de possibilités de choisir p objets parmi n.

   (a) Choix successifs avec remise

   Si l'énoncé contient les mots **successifs avec remises** cela signifie que l'ordre dans lequel on prend les p objets choisis est **important et qu'un objet peut être pris plusieurs fois**. Le modèle mathématique approprié est la **p-liste** et on a : $N = n^p$.

   (b) Choix successifs sans remise

   Si l'énoncé contient les mots **successifs sans remise**, cela signifie que l'ordre dans lequel on prend les p objets est **important mais un objet n'est pris qu'une seule fois** (pas de répétitions). Le modèle mathématique approprié est le **p-arrangement** et on a : $N = A_n^p$.

   (c) Choix simultanés

   Si l'énoncé contient le mot **simultanés**, cela signifie que l'ordre dans lequel les objets sont pris **n'est pas important** et qu'on prend un objet une seule fois (pas de répétitions). Le modèle mathématique approprié est la **p-combinaison** et on a : $N = C_n^p$.

2. Le nombre de manières de choisir les objets des ensembles différents revient à :

   (a) choisir des objets dans un ensemble A et des éléments dans un autre ensemble B est :

   $$Card(A) \times Card(B);$$

   (b) choisir des éléments dans un ensemble A ou des éléments dans un autre ensemble B est :

   $$Card(A \cup B).$$

Exercices

Exercice 1.6.1. Dans un jeu de 32 cartes, on veut tirer 4 cartes. Combien de possibilités a-t-on si on effectue :

1. un tirage successif et avec remise ?
2. un tirage successif sans remise ?
3. un tirage simultané ?

Exercice 1.6.2. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12 dont 3 rouges, 4 vertes et 5 blanches. On tire, successivement et avec remise, 3 boules de cette urne.

Calculer le nombre de tirages distincts dans les deux cas suivants :

1. les trois boules tirées sont de la même couleur ;
2. la première et la troisième boules tirées sont vertes.

Chapitre 2

Probabilités

2.1 Vocabulaire des probabilités

Définition 2.1.1 (Expérience aléatoire, éventualité)**.**

1. On appelle **expérience aléatoire** toute expérience dont on ne peut prévoir le résultat avec certitude mais dont on peut connaître tous les résultats possibles.
2. On appelle **éventualité** tout résultat possible d'une expérience aléatoire.
3. L'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire est appelé **univers des éventualités** et on le note souvent Ω.

Exemple 2.1.1.1. On considère les situations suivantes :

1. On lance un dé et on note le numéro de la face supérieure.
2. On tire au hasard, d'une urne contenant 3 boules rouges et 2 boules blancs, une boule une boule.

Dans chacun de ces situations, définir une expérience aléatoire, une éventualité et l'univers des éventualités.

Définition 2.1.2 (Evénement)**.**
Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.

1. On appelle **événement** de Ω tout sous-ensemble de Ω.
2. On appelle **événement élémentaire** tout événement composé d'une seule éventualité.
3. A et B étant deux événements, on appelle **événement « A et B»** le sous-ensemble $A \cap B$ de Ω et on appelle **événement «A ou B»** le sous-ensemble $A \cup B$ de Ω.
4. Deux événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \phi$.
5. Deux événements A et B sont dits **contraires** si $A \cup B = \Omega$ et $A \cap B = \phi$. Dans ce cas, on dit que A est l'**événement contraire** de B et on note $A = \overline{A}$.

Exemple 2.1.2.1. On tire au hasard, d'une urne contenant 3 boules rouges, 2 boules blanches et 3 boules noires, deux boules simultanément.

Soit Ω l'univers de cette expérience aléatoire. Alors une éventualité est un ensemble contenant deux boules choisies dans l'urne.

- Un événement de cette expérience peut-être

  A : « tirer deux boules de même couleurs >>;

  B : « tirer une boule rouge et une boule blanches >>;

C : « tirer soit deux boules rouges soit deux boules noires >> ;

D : « tirer deux boules blanches ».

- Traduire en une phrase l'événement $A \cap B$. Que peut-on conclure sur A et B ?
- Traduire en une phrase l'événement $A \cup B$.

2.2 Probabilité d'un événement

Définition 2.2.1.
Soit Ω l'univers associé un expérience aléatoire. On appelle **probabilité sur** Ω, toute application p de l'ensemble des événements de Ω dans $[0,1]$ qui à tout événement A associe le nombre p(A) appelé **probabilité de l'événement** et vérifiant :

1. $p(\Omega) = 1$;
2. si A et B sont deux événements incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Propriété 2.2.1.
Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire et p une probabilité sur Ω. Soit A et B sont deux événements de Ω.

1. $p(A) + p(\overline{A}) = 1$
2. Si $A \subset B$, on a :$p(A) \leq p(B)$.
3. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
4. Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des événements élémentaires deux-à-deux incompatibles, alors
$$p(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_n).$$

Exercice 2.2.1.
Une enquête effectuée dans une cantine scolaire donne les résultats suivants :

- la probabilité qu'un enfant aime le yaourt est $0,6$.
- la probabilité qu'un enfant aime les biscuits est $0,5$.
- la probabilité qu'un enfant aime les yaourts et les biscuits est $0,2$.

On considère les événements :

A : «un enfant aime les yaourts ou les biscuits» ;

B : «un enfant n'aime ni les yaourts ni les biscuits» ;

C : «un enfant aime les yaourts mais pas les biscuits>> ;

1. Sans calculer $p(A)$ et $p(C)$, comparer les.
2. Calculer la probabilité de chacun des événements A, B et C.

Définition 2.2.2 (Équiprobabilité)**.**
On dit quil y a **équiprobabilité** lors dune expérience aléatoire, si tous les événements élémentaires ont la même probabilité de réalisation. Dans ce cas, s'il y a n éventualités, la probabilité d'un événement élémentaire est égale $\frac{1}{n}$.

Propriété 2.2.2.
S'il y a équiprobabilité lors d'une expérience aléatoire, alors pour tout événements A de Ω, on a :
$$p(A) = \frac{Card(A)}{Card(B)}.$$

2.2.1 Problèmes de dénombrement

Soit n et p deux entiers naturels.

1. Le nombre de manières de choisir p objets parmi n objets

   Soit N le nombre de possibilités de choisir p objets parmi n.

   (a) Choix successifs avec remise

   Si l'énoncé contient les mots **successifs avec remises** cela signifie que l'ordre dans lequel on prend les p objets choisis est **important et qu'un objet peut être pris plusieurs fois**. Le modèle mathématique approprié est la **p-liste** et on a : $\mathrm{N} = n^p$.

   (b) Choix successifs sans remise

   Si l'énoncé contient les mots **successifs sans remise**, cela signifie que l'ordre dans lequel on prend les p objets est **important mais un objet n'est pris qu'une seule fois** (pas de répétitions). Le modèle mathématique approprié est le **p-arrangement** et on a : $\mathrm{N} = \mathrm{A}_n^p$.

   (c) Choix simultanés

   Si l'énoncé contient le mot **simultanés**, cela signifie que l'ordre dans lequel les objets sont pris **n'est pas important** et qu'on prend un objet une seule fois (pas de répétitions). Le modèle mathématique approprié est la **p-combinaison** et on a : $\mathrm{N} = \mathrm{C}_n^p$.

2. Le nombre de manières de choisir les objets des ensembles différents revient à :

   (a) choisir des objets dans un ensemble A et des éléments dans un autre ensemble B est :

   $$\mathrm{C}ard(\mathrm{A}) \times \mathrm{C}ard(\mathrm{B});$$

   (b) choisir des éléments dans un ensemble A ou des éléments dans un autre ensemble B est :

   $$\mathrm{C}ard(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}).$$

Exercice 2.2.2.

Une urne contient 5 boules blanches, 3 boules noires et 2 boules rouges indiscernable au toucher.

1. On tire simultanément 3 boules de l'urne, calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

   A : «obtenir un tirage unicolore »;

   B : «obtenir exactement deux boules blanches »;

   C : «ne pas obtenir de boule noire ».

2. On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne, calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

   D : «obtenir deux boules blanches »;

   E : «obtenir deux boules blanches et une boule rouge ».

Définition 2.2.3 (Probabilité conditionnelle)**.**

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. Soit A et B deux événements de Ω tels que $\mathrm{A} \neq \phi$. On appelle probabilité conditionnelle de l'événement « B sachant A » le nombre noté $p(\mathrm{B}|\mathrm{A})$ ou $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ et définie par :

$$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}.$$

Propriété 2.2.3.

1. A et B étant deux événements impossibles d'un univers Ω, on a :

   $$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \times p(\mathrm{B}) = p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B}).$$

2. Si A, B et C sont des événements deux-à-deux incompatibles d'un univers Ω tels que $\Omega = A \cup B \cup C$, alors pour tout événement D de Ω
$$p(D) = p(A \cap D) + p(B \cap D) + p(C \cap D).$$

Définition 2.2.4 (Evénements indépendants)**.**
Deux événements A et B d'une expérience aléatoire sont **indépendants** si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Exercice 2.2.3.
Un sondage effectué dans une région montagneuse à propos de la construction dun barrage donne les résultats suivants :

- 65% des personnes interrogés sont contre la construction de ce barrage;
- Parmi les personnes qui sont contre cette construction, 79% sont des écologistes;
- Parmi les personnes favorables à la construction, 30% sont des écologistes.

On note C lévénement "la personne interrogée est contre la construction" et C lévénement contraire. On note E lévénement "la personne interrogée est écologiste" et E lévénement contraire.

1. Donner la valeur de $p(C)$, $p(E|C)$ et $p(E|\overline{C})$
2. Déterminer $p(E)$ et $p(C|\overline{E}$.

2.3 Variable aléatoire réelle, loi de probabilité, espérance mathématique, écart-type

Définition 2.3.1 (Variable aléatoire réelle)**.**
Soit Ω lunivers associé à une expérience aléatoire.

1. On appelle variable aléatoire X sur Ω, toute application de Ω dans R.
2. Lensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est appelée **univers image**.
3. Lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble fini, la variable aléatoire X est dit **discrète**.

Notation. Soit $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'univers image d'une variable aléatoire X. Pour tout $x \in X(\Omega)$, on note :

- $(X = x)$ l'événement « X prend la valeur x »;
- $(X < x)$ l'événement « X prend une valeur inférieur à x ».

□

Définition 2.3.2 (Loi de probabilité)**.**
Soit $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'univers image d'une variable aléatoire réelle X. On appelle **loi de probabilité** de X l'application qui associe à tout élément x_i de $X(\Omega)$ la probabilité de l'événement $(X = x_i)$. La loi de probabilité de X est souvent résumé dans un tableau.

Définition 2.3.3 (Espérance mathématique, écart-type)**.**
Soit $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'univers image d'une variable aléatoire réelle X.

1. On appelle **espérance mathématique de X** le nombre noté E(X) et définie par :
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p(X = x_i).$$
2. On appelle **variance de X** le nombre positif noté V(X) et définie par :
$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(X = x_i).$$
3. On appelle écart-type le nombre noté $\sigma(X)$ et définie par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

2.4 Fonction de répartition

Définition 2.4.1.
Soit X la variable aléatoire définie sur un univers Ω. On appelle **fonction de répartition** de X, la fonction F telle que :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto F(x) = P(X \leq x) \end{aligned}$$

Exercice 2.4.1. La petite agence COMFORT loue des voitures à la journée. Elle dispose dun parc de 16 voitures. Neuf véhicules sont systématiquement loués à des clients réguliers. La loi de probabilité du nombre de voitures louées par jour X est Problème 2.15 donnée dan le tableau suivant :

x_i	10	11	12	13	14	15	16
$p(X = x_i)$	0,05	0,10	0,37	0,27	0,17	0,03	0,001

1. Quelle est la probabilité de :
   (a) louer moins de 13 voitures dans la journée ?
   (b) louer au moins 14 véhicules dans la journée ?
2. Déterminer
   (a) l'espérance du nombre de véhicule s loués dans la journée.
   (b) l'écart-type du nombre de véhicules loués dans la journée.
3. Déterminer la fonction de répartition F de X.

2.5 Loi binomiale

Définition 2.5.1 (Epreuve de Bernoulli)**.**

1. On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire ayant exactement deux éventualités appelés appelées **succès** et **échec**.

   La probabilité de l'événement succès est le paramètre de l'expérience de Bernoulli.

2. On appelle **schéma de Bernoulli** toute suite de n ($n \in \mathbb{N}$) épreuves de Bernoulli identiques et indépendants.

   Le nombre n d'épreuves de Bernoulli et la probabilité p du succès d'une épreuve de Bernoulli sont les paramètres du schéma de Bernoulli.

Propriété 2.5.1.
Soit un schéma de Bernoulli de paramètre n et p et X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus. On a :

- $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$;
- Pour tout $k \in X(\Omega)$, on a : $p(X = k) = C_n^p p^k (1-p)^n - k$;
- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$

Exercice 2.5.1.
Une urne contient 7 boules, numérotées de 1 à 7. On extrait simultanément et au hasard 3 boules de lurne, et on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules de numéro impair obtenu.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer la variance de X.
3. Définir et représenter la fonction de répartition de X.

Chapitre 3

Statistique

3.1 Série statistique groupée à une variable

Définition 3.1.1.
Considérons une série statistique graduée résumé dans le tableau suivant :

Classe	$[a_0, a_1[$	$[a_1, a_2[$	$\dots$	$[a_i, a_{i+1}[$	$\dots$	$[a_{p-1}, a_p[$
Effectifs n_i	x_0	x_1	$\dots$	x_i	$\dots$	x_{p-1}

L'effectif total de la population n est :

$$n = n_0 + n_1 + \cdots + x_{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} n_i$$

- La fréquence f_i d'une classe $[a_i, a_{i+1}[$ d'effectif n_i est donné par : $f_i = \frac{n_i}{n}$ ou $f_i = \frac{n_i \times 100}{n}\%$.
- Le centre c_i d'une classe $[a_i, a_{i+1}[$ est $c_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$.
- L'amplitude α_1 d'une classe $[a_i, a_{i+1}[$ est $\alpha_1 = |a_i - a_{i+1}| = a_{i+1} - a_i$.
- La densité d_i d'une classe $[a_i, a_{i+1}[$ d'effectif n_i est : $d_i = \frac{n_i}{\alpha_i}$ où α_i est l'amplitude de la classe.

Définition 3.1.2 (Classe modale et mode)**.**

- On appelle classe modale, toute classe d'effectif maximal.
- On appelle mode le centre de toute classe de densité maximale.

Définition 3.1.3 (Effectifs cumulés et fréquences cumulées)**.**
Soit x une modalité d'un caractère quantitatif.

- On appelle effectif cumulé croissant de x, l'effectif de la classe $]-\infty, x]$.
- On appelle effectif cumulé décroissant de x l'effectif de la classe $[x, +\infty[$,c'est-à-dire le nombre d'individus ayant une modalité supérieur ou égale à x.

Définition 3.1.4 (Moyenne d'une série statistique)**.**
Soit $(x_i, n_i)_{1\leq i\leq p}$ une série statistique. On appelle moyenne (arithmétique) de cette série le nombre noté $\bar{x}$ et défini par :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$$

Définition 3.1.5 (Médiane)**.**
On appelle médiane d'une série de variable x, la valeur de la modalité M_e telle que :

- 50% au moins des individus ont une valeur de modalité inférieure ou égale à M_e
- 50% au moins des individus ont une valeur modalité supérieure ou égale à M_e

Détermination de la médiane par calcul.

1er cas : Série statistique discrète On classe par ordre croissant toutes les n modalités avec répétition, c'est-à-dire : $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n$.

- Si n est pair, alors $\mathrm{M}_e = \frac{x_p + x_{p+1}}{2}$, où $n = 2p$
- Si n est impair, alors $\mathrm{M}_e = x_{p+1}$, où $n = 2p+1$

2e cas : Série statistique continue.

- On détermine d'abord la classe médiane qui est telle que :
  - son effectif cumulé croissant est supérieur ou égal à $\frac{n}{2}$;
  - son effectif cumulé décroissant est supérieur à $\frac{n}{2}$.
- Si $[x_i, x_{i+1}[$ est la classe médiane, on détermine M_e par interpolation linéaire.
  Soit n_i l'effectif cumulé croissant de x_i et n_{i+1} l'effectif cumulé décroissant de x_{i+1}. Alors

$$\begin{cases} x_i & \leq \mathrm{M}_e \leq x_{i+1} \\ m_i & \leq \frac{n}{2} \leq m_{i+1} \end{cases}.$$

Donc $\frac{m_{i+1} - m_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\frac{n}{2} - m_i}{\mathrm{M}_e - x_i}$.

□

Détermination graphique de la médiane.
Graphiquement la médiane est l'abscisse :

- du point d'intersection des diagrammes des effectifs cumulés croissants et décroissants.
- du point d'intersection des diagrammes des fréquences cumulées.
- du point du diagramme d'effectifs cumulés croissants (ou décroissants) ayant pour ordonnée $0,5$.

□

Définition 3.1.6 (Variance et écart type)**.**
Soit $(x_i, n_i)_{1 \leq i \leq p}$ une série statistique. On appelle variance de cette série le nombre réel définie par :

$$\mathrm{V} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} n_i \times (x_i)^2 - (\overline{x})^2.$$

L'écart-type est définie par $\sigma = \sqrt{\mathrm{V}}$.

Exercice 3.1.1.
Après une série de devoir surveillé on a relevé les notes de mathématiques de 15 élèves dune classe de terminale D. Ces notes sont les suivantes :

8	17	14	14	17
14	8	14	14	9
9	9	10	9	9

1. Etablir le tableau des effectifs et des fréquences cumulées de cette série statistique.

2. Construire le diagramme des fréquences cumulées de cette série.

3. Combien d'élèves ont moins de 14 ?

4. Quels sont le mode et la médiane de cette série.

5. Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de cette série.

Exercice 3.1.2. On considère une série statistique dont les effectifs sont données dans le tableau suivant :

Classe	$[0,4[$	$[4,6[$	$[6,8[$	$[8,10[$
Effectif	15	21	18	6

1. Représenter le tableau statistique avec les effectifs et fréquences cumulés.

2. Déterminer le mode cette série.

3. Construire l'histogramme des effectifs.

4. (a) Construire le polygone des effectifs cumulées croissantes.
   (b) Déterminer la médiane de cette série graphiquement puis par calcul.
   (c) Quel est le nombre d'individus dont la modalité est inférieure à 5.

5. Calculer la moyenne de cette série.

6. Déterminer la variance et l'écart-type de cette série.

3.2 Série statistique à deux variables

Exercice 3.2.1. Dans une maternité, on a relevé, pour chacune des vingt naissances d'une journée, l'âge x (en années) de la mère et le poids y (en kilogrammes) du nouveau-né. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

x	22	18	20	20	16	22	26	22	18	22	18	26	20	26	18	18	22	26	22	20
y	3,2	2,8	3,2	3,6	2,8	2,8	3	2,8	3	3	3,4	3,6	3,2	3	3	3,4	2,8	2,6	3	3,2

1. Présenter ces données dans un tableau à double entrée.

2. Déterminer les séries marginales associées aux caractères x et y.

3. Représenter par des taches le nuage de points associé à cette série double.

4. Déterminer le point moyen de cette série double.

5. Déterminer, par la méthode de Mayer, l'équation de la droite d'ajustement linéaire. Tracer cette droite.

Exercice 3.2.2.

Dans un jury de baccalauréat série D session 2007, un professeur a relevé la note x_i de SVT et la note y_j de mathématiques de 10 candidats. Les résultats obtenues se présentent comme suit :

x_i	1	3	4	6	8	9	11	14	13	13
y_j	1	2	4	4	5	7	8	9	12	14

1. Représenter le nuage de points de cette série statistique.

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de y en x :

   (a) la méthode des moindres carrées ;

(b) la méthode de Mayer.

3. Calculer le coefficient de corrélation de linéaire et donne une interprétation du résultat.

4. Les études statistiques ont montré que l'échantillon des 10 candidats choisis est représentatif de la population formée par les candidats de ce jury.

   (a) peut-on estimer la note de mathématiques d'un candidat ayant obtenu 12 en SVT ?

   (b) Quelle est la note de SVT d'un candidat ayant obtenu 13 en mathématiques ?

5. Une enquête menée auprès de ces candidats a relevé que le jury est composée de 40% de garcons et de 60% de filles ; et aussi 60% des filles et 30% des garçons aiment la SVT. On choisit au hasard un candidat dans ce jury.

   (a) Quelle est la probabilité pour que ce candidat aime la SVT ?

   (b) Sachant que le candidat aime la SVT, quelle est la probabilité qu'elle soit une fille ?