Année scolaire 2020 – 2021

Cours de Mathématiques T^{le} C

Proposé par Clément Adandé
✉ clemsadand@gmail.com
✆ 0022967710561

Dernière édition 2 juillet 2022

Table des matières

SA 1 Configuration de l'espace

Séquence 1 Calcul vectoriel

On désigne par $\mathscr{E}$ l'espace et $\mathscr{V}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathscr{E}$.

1. Barycentre

1.1. Fonction vectorielle de Leibniz

Définition

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n points de $\mathscr{E}$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ n nombres réels, $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$.
On appelle **fonction vectorielle de Leibniz** associée aux points pondérés (A_1, a_1), $(A_2, a_2), \dots$, (A_n, a_n), l'application

$$\begin{aligned} f : \mathscr{E} &\longrightarrow \mathscr{V} \\ M &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i}. \end{aligned}$$

Exemples

SABCD est une pyramide.
Les fonctions $f : M \mapsto \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ et $g : M \mapsto 3\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MD} + 3\overrightarrow{MS}$ sont des fonctions vectorielles de Leibniz.
Déterminons le vecteur $f(A)$.

$f(A) = \overrightarrow{AA} - 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

$f(A) = -3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

Propriété

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n points de $\mathscr{E}$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ n nombres réels, $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Soit f la fonction vectorielle de Leibniz associée aux points pondérés (A_1, a_1), $(A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$.

- Si $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$, alors f est bijective et pour tout point M de $\mathscr{E}$, on a : $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \overrightarrow{MG}$,
  G étant le point tel que $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.
- Si $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$, alors f est constante et pour tout point M de $\mathscr{E}$, on a : $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{OA_i}$,
  O étant un point quelconque de $\mathscr{E}$.

Exemples

ABCD est un tétraèdre. Soit M un point de l'espace.
Réduisons les sommes vectorielles suivantes :

- $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$
  On a : $1 - 2 + 1 = 0$. Donc : $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
- $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$
  On a : $1 + 2 - 1 = 2$. Donc $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{ME}$ avec E le point tel que $\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EC} = \vec{0}$.

• $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$
On a : $1+1+1+1=4$. Donc $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$ avec G le point tel que : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$.

1.2. Barycentre de plusieurs points pondérés

Définition

Soit f la fonction vectorielle de Leibniz associée à n points pondérés (A_1, a_1), (A_2, a_2),..., (A_n, a_n) tels que : $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$.
L'unique antécédent du vecteur $\overrightarrow{0}$ par f est appelé le **barycentre des points pondérés** (A_1, a_1), (A_2, a_2),..., (A_n, a_n). On note $G = \text{bar}\{(A_1, a_1), (A_2, a_2), \ldots, (A_n, a_n)\}$

Vocabulaire.
Lorsque les coefficients $a_1, \ldots, a_n$ sont égaux, on dit que G est l'**isobarycentre** des points $A_1, \ldots, A_n$.

Exemple
ABC est un triangle de centre de gravité G. Alors G est l'isobarycentre des points A, B et C.

Propriété 1

Soit G le barycentre des points pondérés (A_1, a_1), (A_2, a_2),..., (A_n, a_n), $(n \in \mathbb{N} - \{0, 1\})$. Pour tout point M de $\mathscr{E}$, on a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{OA_i}.$$

où O est un point quelconque de $\mathscr{E}$.

Exemple
L'espace est muni du repère (O, I, J, K).
Déterminons les coordonnées du point G, barycentre des points pondérés $(I, -2)$, $(J, 6,)$ et $(K, -1)$.
$G = \text{bar}\{(I, -2); (J, 6); (K, -1)\}$ donc on a :
$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{-2+6-1}(-2\overrightarrow{OI}+6\overrightarrow{OJ}-\overrightarrow{OJ})$
$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(-2\vec{i}+6\vec{j}-\vec{k})$
Donc $G\left(-\frac{2}{3}, 2, -\frac{1}{3}\right)$.

Propriété 2 : Homogénéité du barycentre

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Le barycentre de n points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul.

Exemple
Si G est barycentre des points pondérés (A_1, a_1), (A_2, a_2),..., (A_n, a_n), alors G est aussi barycentre des points pondérés $(A_1, k \times a_1)$, $(A_2, k \times a_2)$, ..., $(A_n, k \times a_n)$, k étant un nombre réel non nul.

Propriété 3 : Associativité du barycentre

Soit $n \in \mathbb{N}-\{0,1,2,3\}$. Le barycentre de n points pondérés est inchangé lorsqu'on remplace une partie de cet ensemble par son barycentre affecté de la somme des coefficients des points qui figurent dans cette partie.

Exemples

ABCD est un tétraèdre. G_1 est l'isobarycentre des points B, C et D et G est l'isobarycentre des points A, B, C et D.
Construisons les points G_1 et G.
On a : $G_1 = \text{bar}\{(B,1),(C,1),(D,1)\}$ et $G = \text{bar}\{(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)\}$.
Donc $G = \text{bar}\{(A,1),(G_1,3)\}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG_1}$.

1.3. Fonction scalaire de Leibniz

Définition

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n points de $\mathscr{E}$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ n nombres réels, $n \in \mathbb{N}-\{0,1\}$.
On appelle **fonction scalaire de Leibniz** associée aux points pondérés $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$, l'application

$$\begin{aligned} g : \mathscr{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i MA_i^2. \end{aligned}$$

Exemples

ABCD est un carré de centre O.
La fonction f, définie de l'espace $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à un point M, associe le nombre réel $f(M) = MA^2 - 3MB^2 + MC^2 + MD^2$, est une fonction scalaire de Leibniz. Calculons $f(A)$.

$$\begin{aligned} f(A) &= AA^2 - 3AB^2 + AC^2 + AD^2 \\ &= -3AB^2 + (AB^2 + BC^2) + AB^2 \\ f(A) &= 0 \end{aligned}$$

Propriété

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n points de $\mathscr{E}$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ n nombres réels, $n \in \mathbb{N}-\{0,1\}$.

- Si $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$, alors pour tout point M de $\mathscr{E}$, on a :
$$\sum_{i=1}^{n} a_i MA_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i GA_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) GM^2,$$
où G est le barycentre des points pondérés $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$.
- Si $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$, alors pour tout point M de $\mathscr{E}$, on a :
$$\sum_{i=1}^{n} a_i MA_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i OA_i^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{OA_i}\right)$$
où O est un point quelconque de $\mathscr{E}$.

Exemples

ABCD est un carré.
Soit M un point de l'espace. Réduisons chacune des sommes suivantes :

•$2MA^2 - MB^2 - MC^2$
On a : $2-1-1=0$. Donc on a :
$2MA^2 - MB^2 - MC^2 = (2AA^2 - AB^2 - AC^2) + 2\overrightarrow{MA}\cdot(2\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$
$= -AB^2 - (AB^2 + AB^2) + 2\overrightarrow{MA}\cdot(-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$
$2MA^2 - MB^2 - MC^2 = -AB^2 - 2\overrightarrow{MO}\cdot(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$
•$2MA^2 - MB^2 - MC^2 + MD^2$
On a : $2-1-1+1=1$. On a donc : $2MA^2 - MB^2 - MC^2 + MD^2 = 2OA^2 - OB^2 - OC^2 + OD^2 + OM^2$ avec $O = \text{bar}\{(A,2),(B,-1),(C-1),(D1)\}$.

2. Lignes de niveau

Définition

Soit E un sous-ensemble de $\mathscr{E}$ et f une application de E dans $\mathbb{R}$ et k un nombre réel.
On appelle **ligne de niveau** k de f, l'ensemble (E_k) des points M de E tels que : $f(M) = k$.

Propriété

Soit E un sous-ensemble de $\mathscr{E}$. Soit (A_1, a_1), (A_2, a_2),..., (A_n, a_n) n points pondérés et f : $E \longmapsto \mathbb{R}$ la fonction scalaire de Leibniz associée aux points pondérés (A_1, a_1), (A_2, a_2),..., (A_n, a_n).
Soit (Γ) la ligne de niveau de k de f, $k \in \mathbb{R}$.
- Si E est une droite, alors (Γ) est soit l'ensemble vide, soit un singleton, soit une paire, soit E.
- Si E est un plan, alors (Γ) est soit vide, soit un singleton, soit une droite, soit un cercle, soit E.
- Si E est l'espace, alors (Γ) est soit l'ensemble vide, soit un singleton, soit un plan, soit une sphère, soit E.

Exemples

ABCD est un carré de côté a.
1. Déterminons l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 8a^2$.
Soit M un point du plan. On a : $1+1+1+1=4$. Donc on a : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$ où O est l'isobarycentre des points A, B, C et D.

$$\begin{aligned} M \in (E) &\iff MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 8a^2 \\ &\iff 4MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 8a^2 \\ &\iff 4MO^2 + 4OA^2 = 8a^2 \text{ car } OA = OB = OC = OD \\ &\iff MO^2 = 2a^2 - OA^2 \\ &\iff OM^2 = 2a^2 - \frac{a^2}{2} \text{ car } OA = \frac{a^2}{2} \\ &\iff OM^2 = \frac{3}{2}a^2 \\ &\iff OM = \sqrt{\frac{3}{2}}a \end{aligned}$$

Donc (E_1) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{\frac{3}{2}}a$.

2. Déterminons l'ensemble (E_2) des points M de l'espace tels que : $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 0$.
   Soit M un point de l'espace. On a : $2-1-1=0$. Donc on a :
   $$2MA^2 - MB^2 - MC^2 = (2AA^2 - AB^2 - AC^2) + 2\overrightarrow{MA}\cdot(2\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$$
   $$= -AB^2 - (AB^2 + AB^2) + 2\overrightarrow{MA}\cdot(-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$$
   $$2MA^2 - MB^2 - MC^2 = -AB^2 - 2\overrightarrow{MO}\cdot(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$
   $$\begin{aligned} M \in (E_2) &\iff 2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 0 \\ &\iff -a^2 - 2\overrightarrow{MO}\cdot(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 0 \\ &\iff -\overrightarrow{MO}\cdot(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{a^2}{2} \\ &\iff \overrightarrow{OM}\cdot(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$
   Soit I le point de l'espace tel que : $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (OI).
   $$\begin{aligned} M \in (E_2) &\iff \overline{OH} \times \overline{OI} = \frac{a^2}{2} \\ &\iff \overline{OH} = \frac{a^2}{2OI^2}\overline{OI} \end{aligned}$$
   $$\begin{aligned} OI^2 &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 \\ &= AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$
   $$OI^2 = AB^2 + 2AB^2 + 2AB^2$$
   $$OI^2 = 5a^2$$
   $$M \in (E_2) \iff \overline{OH} = \frac{1}{10}\overline{OI}$$
   Alors (E_2) est le plan passant perpendiculaire à (OI) passant par le point H tel que : $\overline{OH} = \frac{1}{10}\overline{OI}$.

Exercice

ABCD est un carré de centre O et de côté a.
Déterminer l'ensemble (E) des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA} = 0$.

3. Produit vectoriel

3.1. Orientation de l'espace

◉ Règle du bonhomme d'Ampère

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace $\mathscr{E}$ et les points I, J, K tels que : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$.
Pour orienter l'espace, les physiciens imaginent un observateur ayant les pieds en O, la tête en K et fixant le point I ; deux situations, et deux seulement, sont possibles.
1. Le point J est à gauche de l'observateur ;
   On dit que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **directe** et le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **direct**.
2. Le point J est à droite de l'observateur.

On dit que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **indirecte** et le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **indirect**.
Orienter l'espace, c'est distinguer ces deux types de repères ou de bases.

Remarques

- Permuter deux vecteurs d'une base change son orientation.
- Permuter de façon circulaire les trois vecteurs d'une base ne change pas son orientation.
- Remplacer un vecteur d'une base par son opposé change son orientation.

Exemples

ABCDEFGH est cube.

- Les bases $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, $(\overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{DH})$ et $(\overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GC})$ sont des bases directes.
- Les repères $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$, $(\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HG})$ et $(\overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GC})$ sont des repères indirects.
- Les bases $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CG})$, $(H, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HD})$ et $(G, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GC})$ sont des bases directes.
- Les repères $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$, $(E, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HG})$ et $(B, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GC})$ sont des repères indirects.

Orientation d'un plan de l'espace

L'espace étant orienté, on peut définir une orientation de tout plan de $\mathscr{E}$.
Soit $(\mathscr{P})$ un plan de $\mathscr{E}$, de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et $\vec{k}$ est un vecteur normal à $(\mathscr{P})$.
On convient que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère direct de $(\mathscr{P})$ si $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère direct de $\mathscr{E}$.
Un plan est orienté par le choix d'un de ses vecteurs normaux.

3.2. Produit vectoriel

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté $\mathscr{V}$, A, B et C des points de $\mathscr{E}$ tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
On appelle **produit vectoriel** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le vecteur, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, ainsi défini :
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$;
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires,
  - le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (direction) ;
  - le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe de $\mathscr{V}$ (sens) ;
  - $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin \widehat{BAC}$ (norme).

Exemples

SABCD est une pyramide régulière telle que H soit le centre de sa base carré ABCD et $SH = AB = a$, avec a un réel strictement positif.
Déterminons les vecteurs $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AD}$.
La droite (SH) est perpendiculaire au plan (ABC).

- Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal à (ABC) donc il est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{HS}$ et ils ont même sens.

$$\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = AB \cdot AC \sin \widehat{BAC} = a \times \sqrt{2}a \times \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$$

Donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{HS}\overrightarrow{HS} = a\overrightarrow{HS}$.

• Le vecteur $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}$ est normal à (ABC) donc il est colinéaire à $\overrightarrow{HS}$ et ils sont de sens contraire.
On a : $\left\|\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}\right\| = AD \times AB \sin\widehat{DAB} = a^2$.
Donc $\left\|\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB}\right\| = a\overrightarrow{HS}$.
• Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires donc on a : $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$.

Propriété 1

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathcal{V}$, on a : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Propriétés 2

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{V}$. On a :
• $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u})$;
• $(k\overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge (k\overrightarrow{v}) = k(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$;
• $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$;
• $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$.

Exemple

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathcal{V}$.
Exprimons $(2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \wedge (\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v})$.

$$\begin{aligned}(2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \wedge (\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}) &= (2\overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{u} + (2\overrightarrow{u}) \wedge (2\overrightarrow{v}) + (-\overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v}) \wedge (2\overrightarrow{v}) \\ &= 4\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} \text{ car } 2\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ puis } 2\overrightarrow{v} \text{ et } -\overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires deux à deux}\end{aligned}$$

$(2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \wedge (\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}) = 3\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$

Exercice

L'espace est rapporté à un repère direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Soit $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$ deux vecteurs non nuls de $\mathcal{V}$.
Exprimer $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$.

Propriété 3

Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base orthonormée directe de $\mathcal{V}$, $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$ deux vecteurs.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ sont : $\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\right)$.

Exemple

Soit les vecteurs $\overrightarrow{u}(-3, 8, 1)$ et $\overrightarrow{v}(2, 6, 7)$ de $\mathcal{V}$ muni de la base directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Déterminons les coordonnées de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} + \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$

$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = 50\overrightarrow{i} + 23\overrightarrow{j} + 34\overrightarrow{k}$
Donc $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}(50, 23, 34)$.

3.3. Utilisation du produit vectoriel

Points alignés, coplanaires

Propriétés

Soit A, B C et D sont quatre points de $\mathscr{E}$.
1. A, B et C sont alignés $\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$.
2. Si A, B et C sont non alignés, alors le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC).
3. A, B, C et D sont coplanaires $\Longleftrightarrow \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$.

Exemple
L'espace est muni d'un repère orthonormé direct.
Soient les points $A(0,0,3)$, $B(-2,-1,0)$, $C(6,-3,6)$ et $D(2,4,1)$ de $\mathscr{E}$.
Justifions que les points A, B et C forment un plan dont on déterminera une équation cartésienne.
On a : $\overrightarrow{AB}(-2,-1,-3)$ et $\overrightarrow{AC}(6,-3,3)$.

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\left(\begin{vmatrix}-1 & -3\\ -3 & 3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}-2 & 6\\ -3 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-2 & 6\\ -1 & -3\end{vmatrix}\right)$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-12,-12,0)$

On a : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{0}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires et ainsi les droites (AB) et (AC) sont sécantes. D'où les points A, B et C forment un plan et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à ce plan.
Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

$$\begin{aligned} M \in (ABC) &\Longleftrightarrow \text{M, A, B et C sont coplanaires}\\ &\Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 0\\ &\Longleftrightarrow -12x - 12y + 0(z+3) = 0\\ &\Longleftrightarrow x + y = 0 \end{aligned}$$

Donc $(ABC) : x + y = 0$.

Distance d'un point à une droite, un plan

Propriétés

1. Soit $\mathscr{D}$ une droite de repère $(A, \vec{u})$. Pour tout point M de $\mathscr{E}$, on a :

$$d(M, (\mathscr{D})) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}.$$

2. Soit $(\mathscr{P})$ un plan de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$. Pour tout point M de $\mathscr{E}$, on a :

$$d(M, (\mathscr{P})) = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})\right|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}.$$

Exemple
L'espace est muni d'un repère orthonormé direct.
Soient les points $A(0,0,3)$, $B(-2,-1,0)$, $C(6,-3,6)$ et $D(2,4,1)$ de $\mathscr{E}$.
Calculons la distance $d(A,(BC))$ et $d(D,(ABC))$.
• $d(A,(BC))$

$$\begin{aligned}
d(A,(BC)) &= \frac{\left\|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|}{\overrightarrow{BC}}\\
&= \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|}{\overrightarrow{BC}}\\
&= \frac{12\sqrt{2}}{6^2+3^2+3^2}\\
d(A,(BC)) &= \frac{4\sqrt{3}}{4}\ u.l
\end{aligned}$$

• $d(D,(ABC))$

On a : $\overrightarrow{AD}(2,4,-2)$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-12,-12,0)$.

$$\begin{aligned}
d(D,(ABC)) &= \frac{\left|\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|}{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}\\
&= \frac{|-24-48|}{12\sqrt{2}}\\
&= 3\sqrt{2}\ u.l
\end{aligned}$$

Aire d'un triangle et volume d'un tétraèdre

Propriétés

Soit A, B C et D sont quatre points de $\mathscr{E}$.

1. Si A, B et C sont non alignés, alors l'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC est :

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|\ u.a.$$

2. Si A, B, C et D sont non coplanaires, alors le volume V du tétraèdre ABCD est :

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|\ u.v$$

Exemple

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct.

Soient les points $A(0,0,3)$, $B(-2,-1,0)$, $C(6,-3,6)$ et $D(2,4,1)$ de $\mathscr{E}$.

1. Calculons l'aire du triangle ABC.

Soit $\mathscr{A}$ cette aire. On a :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{12^2+12^2}\\
&= 6\sqrt{2}\ u.a
\end{aligned}$$

2. Justifions que ABCD est tétraèdre dont on calculera le volume.

On a : $\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}) = -72$ et $-72 \neq 0$ donc ABCD est un tétraèdre.

Soit V le volume du tétraèdre ABCD.

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|\\
&= \frac{1}{6}\times 72\\
V &= 6\ u.v
\end{aligned}$$

Exercice

ABC est un triangle équilatéral et I le milieu de [BC]. On pose AB = a avec $a > 0$.
Déterminer la nature de chacun des ensembles suivants :
1. $\mathscr{E}_1 = \{M \in \mathscr{E} |\ \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}\}$;
2. $\mathscr{E}_2 = \{M \in \mathscr{E} |\ (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{0}\}$;
3. $\mathscr{E}_3 = \left\{M \in \mathscr{E},\ \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|\right\}$;
4. $\mathscr{E}_4 = \{M \in (ABC) |\ 2MA^2 - MB^2 - MC^2 = a^2\}$;
5. $\mathscr{E}_5 = \left\{M \in (ABC) \middle| -MA^2 4MB^2 + MC^2 = \frac{a^2}{2}\right\}$;
6. $\mathscr{E}_6 = \{M \in \mathscr{E} | (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) \wedge (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{0}\}$;
7. $E_7 = \{M \in \mathscr{E} |\ (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{MI} \wedge (2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})\}$;
8. $\mathscr{E}_8 = \{M \in \mathscr{E} | \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0\}$.

Séquence 2 Applications de l'espace

Dans la suite, sauf mention du contraire, l'espace est muni d'un repère (O, I, J, K).

1. Application affine dans l'espace

Définition

Une **application affine** de l'espace est une application de l'espace $\mathscr{E}$ dans lui-même qui conserve le barycentre.

Exemple

Les translations, les projections orthogonales, les homothéties et les symétries sont des applications affines de l'espace.

Définition

Soit f une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$.
On appelle **application linéaire associée à** f l'application ϕ de l'ensemble des vecteurs $\mathscr{V}$ dans lui-même telle que pour tous points A et B dans $\mathscr{E}$, on a : $\phi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$.

Exemple

L'application de $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{V}$ qui, à un vecteur $\vec{u}$, associe le vecteur $3\vec{u}$ est l'application vectorielle associée une homothétie de rapport 3.

2. Translation

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathscr{V}$.
On appelle **translation** de vecteur $\vec{u}$ l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui, à tout point M, associe le point M′ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Exemple

ABC est un triangle. Soit f l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui, à un point M, associe le point M′ tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.
Justifions que f est une translation dont on précisera le vecteur de translation.
Soit M un point de $\mathscr{E}$ et M′ son image par f. Alors on a : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.
Comme $1 + 1 - 2 = 0$, on a : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.
Donc f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

Propriété 1

Soit f une application de l'espace $\mathscr{E}$ dans lui-même.
f est une translation si et seulement si pour tous points M et N d'images respectives M′ et N′ par f, on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

Exemple

ABCD est un carré de centre O. Soit S le point de $\mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OS}$.
Soit f l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui, à un point M, associe le point M′ tel que : $\overrightarrow{BM'} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \wedge \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM}$.
Démontrons que f est une translation de le vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{OS}$.
Soit M et N deux points distincts de $\mathscr{E}$ et M′ et N′ les images respectives de points M et N par f. On a : $\overrightarrow{BM'} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \wedge \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BN'} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \wedge \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BN}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M'N'} &= \overrightarrow{M'B} + \overrightarrow{BN'}\\ &= -\overrightarrow{BM'} + \overrightarrow{BN'}\\ &= -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \wedge \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \wedge \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BN}\\ &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$
Donc f est une translation de vecteur.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM'} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BM'}\\ &= \overrightarrow{MB} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \wedge \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM}\\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \wedge \overrightarrow{BC}\\ &= (3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \wedge (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC})\\ &= (3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \wedge (-\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\\ &= (2\overrightarrow{OA}) \wedge (-\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\\ &= -2\overrightarrow{OA} \wedge OB + 2\overrightarrow{OA} \wedge OC\end{aligned}$$

$\overrightarrow{MM'} = -2\overrightarrow{OS}$ car $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}$
Donc f est la translation de vecteur $-2\overrightarrow{OS}$. D'où f est une translation de le vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{OS}$.

Propriété 2 : Expression analytique

Soit $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ un vecteur non nul de $\mathscr{V}$.
L'expression analytique de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$.

Remarque

Etant donné un repère, l'expression analytique d'une application affine établit une relation entre les coordonnées d'un point et son image par cette application.

Exemple

Déterminons l'image du point $A(-1, 1, 0)$ par la translation de vecteur de $\overrightarrow{u}(2, -1, 3)$.
L'expression analytique de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(2, -1, 3)$ est

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \\ z' = z + 3 \end{cases}.$$

L'image de u point A par la translation de vecteur de $\overrightarrow{u}$ est le point $A'(1,0,3)$.

Propriété 3 : Composée de deux translations

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$.
La composée $t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}}$ de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

Remarques

- La composition des translations est commutative c'est-à-dire $t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}} = t_{\overrightarrow{v}} \circ t_{\overrightarrow{u}}$.
- Une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est une transformation (application bijective) dont la réciproque est la translation de vecteur $-\overrightarrow{u}$.

3. Homothétie

3.1. Définition et propriétés

Définition

Soit O un point de $\mathcal{E}$ et k un réel non nul.
On appelle **homothétie** de centre O et de rapport k toute application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à un point M, associe le point M′ tel que : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Exemples

ABCD est un carré de centre O.
Déterminons les images des points A, B, C et D par l'homothétie de centre O et de rapport -1.
Les points A, B, C et D sont tels que : $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB}$. Donc les images des points A, B C et D sont respectivement C, D, A et B.

Propriété 1

Soit f une application de l'espace $\mathcal{E}$ dans lui-même et k un nombre réel non nul différent de 1.
f est une homothétie de rapport k si et seulement si pour tous points M et N d'images M′ et N′ par f, on a : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Exemple

ABCD est un carré de centre O. Soit f l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui, à un point M, associe le point M′ tel que : $\overrightarrow{M'C} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{AM}$.
Justifions que f une homothétie dont précisera le centre et le rapport.
Soit M et N deux points de $\mathcal{E}$ d'images respectives M′ et N′ par f.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M'N'} &= \overrightarrow{M'C} + \overrightarrow{CN'} \\
&= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{AM} - (\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND} - \overrightarrow{AN}) \\
&= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{NA}) \\
&= 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} - (3\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}) \\
&= 3\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{BN}
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{M'N'} = 3\overrightarrow{MN}$

Donc f une homothétie de rapport k et ainsi f admet un unique point invariant, son centre.

$$\begin{aligned}
f(M) = M &\iff \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{AM} \\
&\iff \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{0} \\
&\iff 2\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{0} \text{ car } G = \text{bar}\{(A,1),(B,1),(C,-1),(D,1)\} \\
&\iff \overrightarrow{MG} = \overrightarrow{0} \\
&\iff M = G
\end{aligned}$$

Donc f est l'homothétie de centre G et de rapport 3.

Remarques

- Toute homothétie de l'espace est une application affine.
- L'application vectorielle associée à une homothétie de rapport k ($k \in \mathbb{R} - \{0,1\}$) est l'application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ qui, à tout vecteur $\overrightarrow{u}$, associe le vecteur $k\overrightarrow{u}$.

Cette application vectorielle est appelée **homothétie vectorielle** de rapport k.

Propriété 2

Une homothétie de rapport k ($k \in \mathbb{R} - \{0,1\}$) multiplie la distance par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.

Exemple

A et B sont deux points distincts de $\mathcal{E}$, r et r' deux nombres nombres réels.

Une homothétie h transforme le cercle $(\mathcal{C})$ de centre A et de rayon r en le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre B et de rayon r'.

Déterminons les éléments caractéristiques de cette homothétie.

Soit k le rapport de l'homothétie h et O son centre.

h transforme le cercle $(\mathcal{C})$ en le cercle $(\mathcal{C}')$ donc on a : $\pi r^2 = k^2 \pi r'^2$ et $h(A) = B$.

$$\begin{aligned}
\pi r^2 = k^2 \pi r'^2 &\iff k^2 = \frac{r^2}{r'^2} \\
&\iff k^2 = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \\
&\iff k = \frac{r}{r'} \text{ ou } k = -\frac{r}{r'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(A) = B &\iff \overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB} \\
&\iff \overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{0} \\
&\iff O = \text{bar}\{(A,1),(B,-k)\}
\end{aligned}$$

Donc toute homothétie de rapport k et de centre le barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(B,-k)$, $k \in \left\{-\frac{r}{r'}, \frac{r}{r'}\right\}$, transforme le cercle $(\mathcal{C})$ en le cercle $(\mathcal{C}')$.

3.2. Composée d'homothéties et de translation

Propriété 1 : Composée de deux homothéties de même centre

Soit h et h' deux homothéties de même centre O et de rapports respectifs k et k'.
Alors $h \circ h'$ et $h' \circ h$ sont des homothéties de rapport kk' et on a : $h \circ h' = h' \circ h$.

Propriété 2 : Composée de deux homothéties de centres distincts

Soit h et h' deux homothéties de centres respectifs O et O$'$ et de rapports respectifs k et k'.
•Si $kk' = 1$, alors $h' \circ h$ est une translation de vecteur.
•Si $kk' \neq 1$, alors $h' \circ h$ est une homothétie de rapport kk'.

Remarque

•Si $h' \circ h$ est une translation, le vecteur de translation se détermine par la recherche de l'image d'un point par $h' \circ h$.
•Si $h' \circ h$ est une homothétie, son centre est le point invariant par $h' \circ h$.

Propriété 3 : Composée d'une homothétie et d'une translation

Soit h une homothétie de centre O et de rapport k, t une translation de vecteur.
Alors $h \circ t$ et $t \circ h$ sont des homothéties de rapport k.

Remarque

Les propriétés étudiées dans le cas d'une homothétie plane s'étendent à l'espace. Ainsi une homothétie de l'espace conserve l'alignement, le milieu, le parallélisme, l'orthogonalité, le contact et les angles orientés.

Exercice

ABCD est carré de centre O. Soit h et h' les homothéties de centres respectifs A et C de rapports respectifs $\frac{1}{2}$ et 2. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes $h \circ h$, $h \circ h'$, $h' \circ h$ et $h \circ t$.

4. Symétrie orthogonale par rapport à un plan

4.1. Plan médiateur

Définition

Soit A et B deux points distincts de $\mathscr{E}$.
On appelle **plan médiateur** du segment [AB], le plan orthogonal à la droite (AB) et passant par le milieu du segment [AB].

Exemples

SABCD est une pyramide régulière à base carré.
Les plans (SAC) et (SBD) sont les plans médiateurs respectifs des segments [BD] et [AC].

Propriété

Soit A et B deux points distincts de $\mathscr{E}$.
L'ensemble des points de $\mathscr{E}$ équidistants aux points A et B est le plan médiateur du segment [AB].

Exemple

ABCDEFGH est un cube.
- L'ensemble des points équidistants du segment [AF] est le plan (BEC).
- L'ensemble des points M de l'espace vérifiant AM = CM est le plan (DBF).

4.2. Définition et propriétés

Définition

Soit $(\mathscr{P})$ un plan.
On appelle réflexion de plan $(\mathscr{P})$ l'application de $\mathscr{E}$ dans lui-même qui, à tout point M, associe le point M′ tel que :
- si $M \in (\mathscr{P})$, alors $M = M'$;
- si $M \notin (\mathscr{P})$, alors $(\mathscr{P})$ est le plan médiateur de [MM′].

La réflexion de plan $(\mathscr{P})$ est aussi appelé **symétrie orthogonale** par rapport au plan $(\mathscr{P})$.

Exemples

SABCD est une pyramide régulière à base carré.
Déterminons les images des points A, B, C et D par la réflexion de plan (SAC).
- Les points A et C appartiennent au plan (SAC) donc ils ont pour images respectives les points A et C par la réflexion de plan (SAC).
- Le plan (SAC) est un plan médiateur du segment [BD] donc les points B et D sont les images respectives des points D et B par la réflexion de plan (SAC).

Propriétés

Soit $s_{\mathscr{P}}$ une réflexion de plan $(\mathscr{P})$, M et M′ deux points de l'espace. On a :
- L'ensemble des points invariants de $s_{\mathscr{P}}$ est $(\mathscr{P})$.
- Soit H le projeté orthogonal de M sur $(\mathscr{P})$. On a :
$$s_{\mathscr{P}}(M) = M' \iff \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}.$$
- Si $s_{\mathscr{P}}(M) = M'$, alors $s_{\mathscr{P}}(M') = M$.
- $s_{\mathscr{P}} \circ s_{\mathscr{P}} = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$ et $(s_{\mathscr{P}})^{-1} = s_{\mathscr{P}}$

  On dit que $s_{\mathscr{P}}$ est involutive.

Exemple

L'espace est muni d'un repère orthonormé.
Déterminons l'expression analytique de la réflexion s de plan $(\mathscr{P}) : 3x+3y-2z+4=0$.
Soit $\overrightarrow{n}(3,3,-2)$ un vecteur normal à$(\mathscr{P})$.

1ère méthode : Utilisation de la définition

Soit $M(x,y,z)$ et $M'(x',y',z')$ deux points distincts, et I le milieu segment [MM′].

$$s(\mathrm{M})=\mathrm{M}' \iff \begin{cases}(\mathrm{MM}')\perp(\mathscr{P})\\ \mathrm{I}\in(\mathscr{P})\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{MM}'}=k\overrightarrow{n},\ k\in\mathbb{R}\\ 3\frac{x+x'}{2}+3\frac{y+y'}{2}-2\frac{z+z'}{2}+4=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x'=x+3k\\ y'=y+3k\\ z'=z-2k\\ 3\frac{2x+3k}{2}+3\frac{2y+3k}{2}-2\frac{2z-2k}{2}+4=0\end{cases},k\in\mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases}x'=x+3k\\ y'=y+3k\\ z'=z-2k\\ k=\frac{1}{11}(-3x-3y+2z-4)\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x'=\frac{1}{11}(2x-9y+6-12)\\ y'=\frac{1}{11}(-9x+2y+6z-12)\\ z'=\frac{1}{11}(6x+6y+7z-12)\end{cases}$$

Donc $s:\begin{cases}x'=\frac{1}{11}(2x-9y+6-12)\\ y'=\frac{1}{11}(-9x+2y+6z-12)\\ z'=\frac{1}{11}(6x+6y+7z-12)\end{cases}$.

2e méthode : Utilisation de la propriété

Soit $\mathrm{H}(x',y',z')$ le projeté orthongonal d'un point $\mathrm{M}(x,y,z)$ sur le plan $(\mathscr{P})$.

$$\begin{cases}(\mathrm{MH})\perp(\mathscr{P})\\ \mathrm{H}\in(\mathscr{P})\end{cases} \iff \begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{MH}}=k\overrightarrow{n},k\in\mathbb{R}\\ 3x'+3y'-2z+4=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x'-x=3k\\ y'-y=3k\\ z'-z=-2k\\ 3x'+3y'-2z'+4=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x'=3k+x\\ y'=3k+y\\ z'=-2k+z\\ 3(3k+x)+3(3k+y)-2(-2k+z)+4=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x'=3k+x\\ y'=3k+y\\ z'=-2k+z\\ k=-\frac{1}{22}(3x+3y-2z+4)\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x'=\frac{1}{22}(13x-9y+6z-12)\\ y'=\frac{1}{22}(-9x+13y+6z-12)\\ z'=\frac{1}{22}(9x+9y18z+8)\end{cases}$$

Soit $\mathrm{M}(x, y, z)$ et $\mathrm{M}'(x', y', z')$ deux points de l'espace et $\mathrm{H}(x_\mathrm{H}, y_\mathrm{H}, z_\mathrm{H})$ le projeté orthogonal de M sur le plan $(\mathscr{P})$.

$$
\begin{aligned}
s(\mathrm{M}) = \mathrm{M}' &\iff \overrightarrow{\mathrm{MM}'} = 2\overrightarrow{\mathrm{MH}} \\
&\iff \begin{cases} x' - x = 2(x_\mathrm{H} - x) \\ y' - y = 2(y_\mathrm{H} - y) \\ z' - z = 2(z_\mathrm{H} - z) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x' = 2x_\mathrm{H} - x \\ y' = 2y_\mathrm{H} - y \\ z' = 2z_\mathrm{H} - z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x' = \frac{1}{11}(13 - x9y + 6z - 12) - x \\ y' = \frac{1}{11}(-9x + 13y + 6z - 12) - y \\ z' = \frac{1}{11}(9x + 9y + 18z + 8) - z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x' = \frac{1}{11}(2x - 9y + 6z - 12) \\ y' = \frac{1}{11}(-9x + 2y + 5z - 12) \\ z' = \frac{1}{11}(9x + 9y + 7z - 12) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Donc $s : \begin{cases} x' = \frac{1}{11}(2x - 9y + 6z - 12) \\ y' = \frac{1}{11}(-9x + 2y + 5z - 12) \\ z' = \frac{1}{11}(9x + 9y + 7z - 12) \end{cases}$

4.3. Réflexions et configurations

Propriétés 1

Soit $(\mathscr{P})$ un plan et $s_\mathscr{P}$ la réflexion de plan $(\mathscr{P})$.

• Soit $(\mathscr{Q})$ un plan perpendiculaire à $(\mathscr{P})$ et (Δ) la droite d'intersection de $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$.
Alors :
– $(\mathscr{Q})$ est globalement invariant par $s_\mathscr{P}$.
– la restriction de $s_\mathscr{P}$ à $(\mathscr{Q})$ est, dans le plan $(\mathscr{Q})$, la symétrie orthogonale d'axe (Δ).

• Soit (Δ') une droite orthogonale à $(\mathscr{P})$ en un point I.
Alors :
– (Δ') est globalement invariant par $s_\mathscr{P}$.
– la restriction de $s_\mathscr{P}$ à (Δ'), sur la droite (Δ'), la symétrie de centre I.

Une figure est globalement invariant par une transformation si elle est sa propre image par cette transformation.

Exemples

ABCDEFGH est un cube. s est la réflexion de plan (DBF).

1. Les plans (EFG) et (ACG) sont globalement invariant par s.
2. Dans le plan (EFG), la restriction de s au plan (EFG) est la symétrie orthogonale d'axe (HF).
3. Sur la droite (AC),le centre du carré ABCD est le point invariant de la restriction de s à la droite (AC).

Propriétés 2

Toute réflexion de l'espace $\mathscr{E}$ transforme :
- une droite en une droite ;
- un plan en un plan ;
- une figure plane en une figure plane de même nature ;
- un solide de l'espace en un solide de même nature.

Exemples

ABCDEFGH est un cube. s est la réflexion de plan (DBF).
1. La carré ABCD est globalement invariant par s.
2. Le cube ABCDEFGH est globalement invariant par s.

Propriété 3

Toute réflexion conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

4.4. Composée deux réflexions de plans parallèles

Propriétés

- La composée de deux réflexions de plans parallèles est une translation dont le vecteur est normal à chacun de ces deux plans.
- Toute translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul est la composée de deux réflexions de plans parallèles telles que $\overrightarrow{u}$ soit normal à chacun de ces deux plans.

Remarque

Soit $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ deux plans parallèles, O un point de $(\mathscr{P})$ et O′ le projeté orthogonal de O sur $(\mathscr{P}')$.
Alors on a : $s_{\mathscr{P}'} \circ s_{\mathscr{P}} = t_{2\overrightarrow{OO'}}$.

Exemple

ABCDEFGH est un cube.
La composée de la réflexion de plan (AED) par la réflexion de plan (FBC) est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$.

5. Symétrie orthogonale par rapport à une droite

5.1. Définition et propriétés

Définition

Soit (Δ) une droite de l'espace.
On appelle **demi-tour** d'axe (Δ) l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui, à tout point M, associe le point M′ tel que :
- si $M \in (\Delta)$, alors $M = M'$;
- si $M \notin (\Delta)$, alors (Δ) est une médiatrice de $[MM']$.

Un demi-tour d'axe (Δ) est aussi appelé **symétrie orthogonale par rapport à** (Δ).

Exemples

SABCD est une pyramide régulière à base carré.
Déterminons les images des points A, B, C et D par le demi-tour d'axe (AC).

- Les points A et C appartiennent à la droite (AC) donc ils ont pour images respectives les points A et C par le demi-tour d'axe (AC).
- Le droite (AC) est une médiatrice du segment [BD] donc les points B et D sont les images respectives des points D et B par le demi-tour d'axe (AC).

Propriétés

Soit s_Δ un demi-tour d'axe (Δ), M et M$'$ deux points de l'espace. On a :

- L'ensemble des points invariants de s_Δ est (Δ).
- Soit H le projeté orthogonal de M sur (Δ). On a :
$$s_\Delta(\mathrm{M}) = \mathrm{M}' \iff \overrightarrow{\mathrm{MM}'} = 2\overrightarrow{\mathrm{MH}}.$$
- Si $s_\Delta(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$, alors $s_\Delta(\mathrm{M}') = \mathrm{M}$.
- $s_\Delta \circ s_\Delta = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$ et $(s_\Delta)^{-1} = s_\Delta$

  On dit que s_Δ est involutive.

Exemple

L'espace est muni d'un repère orthonormé.
Déterminons l'expression analytique du demi-tour d d'axe $(\mathscr{D})$ de système d'équations

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Une représentation paramètrique de la droite $(\mathscr{D})$ est $\begin{cases} x &= -\frac{1}{2} - t \\ y &= \frac{1}{2} + t, t \in \mathbb{R} \\ z &= t \end{cases}$.

Donc le couple $(\mathrm{A}, \vec{u})$ est un repère de la droite $(\mathscr{D})$ où $\mathrm{A}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et $\vec{u}(-1, 1, 1)$.
Soient $\mathrm{M}(x, y, z)$ et $\mathrm{M}'(x', y', z')$ deux points de l'espace et I le milieu du segment [MM$'$].

$$d(\mathrm{M}) = \mathrm{M}' \iff \begin{cases} (\mathrm{MM}') \perp (\mathscr{D}) \\ \mathrm{I} \in (\mathscr{D}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -(x' - x) + (y' - y) + (z' - z) = 0 \\ \frac{x + x'}{2} = -\frac{1}{2} - t \\ \frac{y + y'}{2} = \frac{1}{2} + t \\ \frac{z + z'}{2} = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (1 + 2t + x) + x + (1 + 2t - y) - y + (2t - z) - z = 0 \\ x' = -2t - x - 1 \\ y' = 2t - y + 1 \\ z' = 2t - z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = \frac{1}{3}(-x + y + z - 1) \\ x' = -\frac{1}{3}(-x + y + z - 1) - x - 1 \\ y' = \frac{1}{3}(-x + y + z - 1) - y + 1 \\ z' = \frac{1}{3}(-x + y + z - 1) - z \end{cases}$$

L'expression analytique de d est : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x-2y-2z-1) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x-y+2z+1) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x+2y-z-2) \end{cases}$.

5.2. Réflexions et configurations

Propriétés 1

Soit (Δ) une droite de l'espace, s_Δ le demi-tour d'axe (Δ) et $(\mathscr{P})$ le plan orthogonal en I à (Δ).
• $(\mathscr{P})$ est globalement invariant par s_Δ.
• La restriction de s_Δ à $(\mathscr{P})$ est, dans le plan $(\mathscr{P})$, la symétrie de centre I.

Exemple

Un demi-tour d laisse globalement invariant un carré ABCD.
1. Déterminer l'axe de symétrie de d.
2. Déterminer l'image du carré ABCD par la restriction de d au plan (ABC). Faire une figure.

Propriétés 2

Tout demi-tour transforme :
• une droite en une droite ;
• un plan en un plan ;
• une figure plane en une figure plane de même nature ;
• un solide de l'espace en un solide de l'espace de même nature.

Exemple

SABCD est une pyramide régulière telle que $d(\mathrm{S},(\mathrm{ABC})) = \mathrm{AB}$.
Construire l'image de cette pyramide par la symétrie orthogonale d'axe (AC) et déterminer son volume.

Propriété 3

Tout demi-tour conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

Exemple

ABCDEFGH est un cube.
1. Construire l'image $\mathscr{C}_1$ du cube par le demi-tour d'axe (BC).
2. Quelle est l'image du cube par la réflexion de plan (BDF) ?

5.3. Composée de demi-tours et de réflexions

Propriétés 1 : Composée de deux réflexions de plans perpendiculaires

• La composée de deux réflexions de plans perpendiculaires suivant une droite (Δ) est le demi-tour d'axe (Δ).
• Tout demi-tour d'axe (Δ) est la composée de deux réflexions de plans perpendiculaires suivant la droite (Δ).

Propriétés 2 : Composée de deux demi-tours d'axes parallèles

- La composée de deux demi-tours d'axes parallèles est une translation dont le vecteur est orthogonal à un vecteur directeur de l'un de ces deux axes.
- Toute translation de vecteur $\vec{u}$ non nul est la composée de deux demi-tours d'axes parallèles dont un vecteur directeur est orthogonal à $\vec{u}$.

Propriétés 3 : Composée de deux demi-tours d'axes perpendiculaires

- La composée de deux demi-tours d'axes (Δ_1) et (Δ_2) perpendiculaires en un point A est le demi-tour dont l'axe $(\mathscr{D})$ est la perpendiculaire commune à (Δ_1) et (Δ_2) en A.
- Tout demi-tours de l'espace est la composée de deux demi-tours d'axes perpendiculaires.

Propriétés 4 : Composée d'un demi-tour et d'une réflexions

- La composée d'un demi-tour d'axe (Δ) et d'une réflexion de plan $(\mathscr{P})$ tels que (Δ) est orthogonal à $(\mathscr{P})$ en un point A, est la symétrie de centre A.
- Toute symétrie centrale de l'espace est la composée d'un demi-tour et d'une réflexion dont l'axe et le plan sont orthogonaux.

Exemples

ABCDEFGH est un cube, I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB], [CD], [HG] et [EF].

1. La composée des réflexions de plans (ABC) et (AED) est le demi-tour d'axe (AD).
2. La composée du demi-tour (IL) par le demi-tour (AE) est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. La composée des demi-tours d'axes (EH) et (HG) est le demi-tour d'axe (HD).
4. La composé du demi-tour d'axe (ED) et de la réflexion de plan (AHG) la symétrie centrale de centre, le milieu du carré ABCD.

Exercice

ABCDEFGH est un cube.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des applications affines suivantes : $s_{(ABC)} \circ s_{(EFH)}$, $s_{(CFG)} \circ s_{(ABC)}$, $s_{(AED)} \circ s_{(EFG)}$, $s_{(AD)} \circ s_{(FG)}$, $s_{(HG)} \circ s_{(CD)}$, $s_{(BC)} \circ s_{(CG)}$, $s_{(AD)} \circ s_{(AB)}$, $s_{(ADE)} \circ s_{(GH)}$ et $s_{(BC)} \circ s_{(ABE)}$.

SA 2 Organisation des données

Séquence 1 Système d'équations linéaires

Définitions

- On appelle **système d'équations linéaires** à n inconnues ($n \geq 3$), tout système de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 & + \cdots + a_{n1}x_n & = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 & + \cdots + a_{n2}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1p}x_1 + a_{2p}x_2 & + \cdots + a_{np}x_n & = b_p \end{cases}$$

  où a_{ij} ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$) est un nombre réel, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les inconnues et p un entier naturel supérieur à 2.
- On appelle **solution** d'un tel système, toute n-liste $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ vérifiant simultanément les équations qui les composent.
- Deux systèmes S_1 et S_2 d'équations linéaires sont dits **équivalents** lorsqu'ils possèdent le même ensemble des solutions. On note $S_1 \iff S_2$.

Résoudre un système d'équations linéaires, c'est trouver toutes les solutions de ce système.

Méthode du pivot de Gauss.

Pour résoudre un système de p équations $L_1, L_2, \ldots, L_p$ de n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on transforme le système initial en un système triangulaire équivalent.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 & + \cdots + a_{n1}x_n & = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 & + \cdots + a_{n2}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1p}x_1 + a_{2p}x_2 & + \cdots + a_{np}x_n & = b_p \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 & + \cdots + \alpha_{n1}x_n & = \beta_1 \\ \alpha_{22}x_2 & + \cdots + \alpha_{n2}x_n & = \beta_2 \\ & \ddots & \vdots \\ & \alpha_{np}x_n & = \beta_p \end{cases}$$

Pour ce faire, choisir une équation dont le coefficient de la première inconnue est différent de 0 et éliminer cette inconnue dans les $(p-1)$ autres équations et procéder de la même manière jusqu'à l'obtention du système échelonné.
Les opérations élémentaires suivantes sont permises pour obtenir un système équivalent au système initial.

- On peut permuter deux équations L_i et L_j ($i \neq j$). On note $L_i \leftrightarrow L_j$.
- On peut remplacer une équation L_i par la nouvelle équation obtenue en la multipliant membre à membre par α ($\alpha \in \mathbb{R}^*$). On note $L_i \leftarrow \alpha L_i$.
- On peut remplacer une équation L_i par une combinaison linéaire de L_i et d'une autre équation L_j. On note $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ ($\alpha \neq 0, \alpha \neq \beta$).

Exemple

Résoudre, dans $\mathbb{R}^4$, le système d'équations linéaires suivant :

$$(S) : \begin{cases} 3x + 2y - z + t & = 5 \\ x + 2y + z - t & = 3 \\ 4x - 3y + 2z - 3t & = 4 \\ 3x - y + z + t & = -5 \end{cases}.$$

Séquence 2 Arithmétique

1. Anneau dans $(\mathbb{Z}, +, \times)$

1.1. Addition dans $\mathbb{Z}$

Propriétés 1

Pour tous entiers relatifs a, b et c, on a :
1. $a + b \in \mathbb{Z}$ (+ dans $\mathbb{Z}$ est une loi de composition interne)
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (+ est associative)
3. $a + 0 = 0 + a = a$ (0 est élément neutre pour +)
4. $\exists a' \in \mathbb{Z}, a + a' = a' + a = 0$ (tout élément de $\mathbb{Z}$ a un opposé dans $\mathbb{Z}$)
5. $a + b = b + a$ (+ est commutative)

Vocabulaire.
- Pour résumer les quatre premières propriétés, on dit que $(\mathbb{Z}, +)$ est un **groupe**.
- Pour résumer les cinq propriétés, on dit que $(\mathbb{Z}, +)$ est un **groupe commutatif**.

Exemples
- $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif.
- Soit P l'ensemble des nombres entiers relatifs pairs.
  $(P, +)$ est groupe commutatif.
- Soit I l'ensemble des nombres entiers relatifs impairs.
  $(I, +)$ n'est pas un groupe car la somme de deux entiers impairs est paire.

Propriété 2

Pour tous entiers relatifs a , b et c, on a : $a + b = a + c \implies b = c$.

Exemple
Soient a et b deux entiers relatifs.
Résolvons, dans $\mathbb{Z}$, l'équation $x + a = b$.
$x + a = b \iff x + a = b + 0$ car 0 est l'élément neutre pour +
$\iff x + a = b + [(-a) + a]$ car $-a$ est l'opposé de a
$\iff x + a = [b + (-a)] + a$ car + est associative
$\iff x = b - a$ car $b + (-a)$ est noté $b - a$
Donc la solution de l'équation $x + a = b$ est $b - a$.

1.2. Multiplication dans $\mathbb{Z}$

Propriétés 1

Pour tous entiers relatifs a, b et c, on a :
6. $a \times b \in \mathbb{Z}$ ($\times$ dans $\mathbb{Z}$ est une loi de composition interne)
7. $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ ($\times$ est associative)
8. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ ($\times$ est distributive par rapport à +)
9. $a \times b = b \times a$ ($\times$ est commutative)
10. $a \times 1 = 1 \times a = a$ (1 est élément neutre pour $\times$)

Vocabulaire.
Pour résumer les propriétés 1, 2, 3,…, 10, on dit que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un **anneau commutatif unitaire**.

Exemples
• $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.
• $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

Propriétés 2

Pour tous entiers relatifs a, b et c $(c \neq 0)$, on a :

• $a \times 0 = 0$; • $ca = cb \implies a = b$.

Exemple
Soit a et b deux entiers relatifs tels que a soit non nul.
Résolvons, dans $\mathbb{Z}$, l'équation $ax + ab = 0$.

$$\begin{aligned} ax + ab = 0 &\iff a(x+b) = a \times 0 \text{ d'après la propriété} \\ &\iff x + b = 0 \text{ d'après la propriété puisque } a \neq 0 \\ &\iff x + b = -b + b \text{ car } -b \text{ est l'opposé de } b \\ &\iff x = -b \end{aligned}$$

Donc la solution de l'équation $ax + ab = 0$ est $-b$.

1.3. Ordre dans $\mathbb{Z}$

Définition

On définit la relation $\leq$ dans $\mathbb{Z}$ par : $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, (a \leq b \iff b - a \in \mathbb{N})$.

Exemples
• On a : $2 - (-3) = 5$ et $5 \in \mathbb{N}$ donc $-3 \leq 2$.
• On a : $(-6) - (-7) = 1$ et $1 \in \mathbb{N}$ donc $-7 \leq -6$.

Propriétés 1

Pour tous entiers relatifs a, b et c, on a :
1. $a \leq a$ (la relation $\leq$ est réflexive)
2. $a \leq b$ et $b \leq a \implies a = b$ (la relation $\leq$ est antisymétrique)
3. $a \leq b$ et $b \leq c \implies a \leq c$ (la relation $\leq$ est transitive)

Vocabulaire.
• Pour résumer ces trois propriétés, on dit que la relation $\leq$ est une **relation d'ordre**.
• Pour tous entiers relatifs a et b, on a : ($a \leq b$ ou $b \leq a$).
On dit que la relation $\leq$ est une **relation d'ordre total** dans $\mathbb{Z}$.

Propriété 2

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Exemples

•L'ensemble des nombres premiers admet un plus petit élément 2.
•L'ensemble des nombres entiers naturels pairs admet un plus petit élément 0.

Propriétés 3

Pour tous entiers relatifs a, b et c, on a :
•$a \leq b \iff a+c \leq b+c$;
•si c est strictement positif, alors $a \leq b \iff a \times c \leq b \times c$;
•si c est strictement négatif, alors $a \leq b \iff a \times c \geq b \times c$.

Exemple

a et b deux entiers relatifs non lus tels que $a \leq b$.
•Comparons a^2b^3 et a^3b^2.

$$\begin{aligned} a \leq b &\implies a \times a^2b^2 \leq b \times a^2b^2 \text{ car } a^2b^2 > 0 \\ &\implies a^3b^2 \leq a^2b^3 \end{aligned}$$

On a : $a^3b^2 \leq a^2b^3$.
•Résolvons, dans $\mathbb{Z}$, l'inéquation $2x+1 \leq 5$.

$$\begin{aligned} 2x+1 \leq 5 &\iff 2x+1 \leq 5 \\ &\iff 2x+1 \leq 5+(-1)+1 \\ &\iff 2x \leq 5+(-1) \\ &\iff 2x \leq 4 \\ &\iff 2x \leq 2 \times 2 \\ &\iff x \leq 2 \end{aligned}$$

Alors les solutions de l'inéquation $2x+1 \leq 5$ sont les nombres entiers relatifs inférieurs ou égaux à 2.

Propriétés 4

•Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.
•Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.

Exemple

Soit A l'ensemble des entiers relatifs a tels que $8a^2 \leq 4a^3$.
On a : $8 \times 0^2 = 0$ et $4 \times 0^3 = 0$ donc $8 \times 0^2 = 4 \times 0^3$.
D'où 0 est un élément de A et ainsi A est non vide.
Soit $a \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} a \in \mathrm{A} &\iff 8a^2 \leq 4a^3 \\ &\iff 8a^2 - 4a^3 \leq 0 \\ &\iff 4a^2(2-a) \leq 0 \\ &\iff 2-a \leq 0 \text{ car } 4a^2 > 0 \\ &\iff a \geq 2 \end{aligned}$$

Donc A est minoré par 2.
En résumé, A est une partie non et minoré de $\mathbb{Z}$.
Donc A admet un plus petit élément.

1.4. Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Propriété 1

Soient a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$.
Il existe un unique couple (q, r) tels que : $a = bq + r$ avec $0 \leq |r| < b$.

Vocabulaire.
Les nombres q et r s'appellent respectivement **quotient** et **reste** de la division euclidienne de a par b.

Effectuer une division euclidienne, c'est déterminer son quotient et son reste.

Exemples

- On a : $14 = 3 \times 4 + 2$ donc le reste et le quotient de la division euclidienne de 14 par 3 sont 2 et 4 respectivement car $0 \leq 2 < 3$.
- On a :
  $$\begin{aligned} -14 &= -3 \times 4 - 2 \\ &= -3 \times 4 + 1 - 3 \\ &= -3(-5) + 1 \end{aligned}$$
  D'où le reste et le quotient de la division euclidienne de -14 par 3 sont 1 et -5 respectivement car $0 \leq 1 \leq 3$.
- On a : $21 = -3 \times (-7)$ donc le reste et le quotient de la division euclidienne de 21 par -3 sont 0 et -7 respectivement car $0 \leq |-3|$.

2. Système de numération

Propriété

Soit b un entier supérieur ou égal à 2. Tout entier naturel non nul x peut s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k b^k$, où les a_k sont des entiers tels que $0 \leq a_k < b$ et $a_n \neq 0$.

Vocabulaire et notation.
On note : $x = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0}^b$ et on dit que x est **écrit en base b**.
Par convention, les écritures sans «barre» sont en base 10.

Exemples

- Dans le système décimal, les entiers naturels sont écrits en base 10 avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.
- Dans le système binaire, les entiers sont écrits en base 2 avec les chiffres 0 et 1.
  Ecrivons $\overline{10101110}^2$ dans le système décimal.
  $$\begin{aligned} \overline{10101110}^2 &= 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^7 \\ &= 2 + 4 + 8 + 32 + 128 \end{aligned}$$
  $\overline{10101110}^2 = 174$
  Ecrivons 19 dans le système binaire.
  On effectue des divisions successives de 19 par 2.
  On a :$19 = \overline{10011}^2$.

19	2			
1	9	2		
	1	4	2	
		0	2	2
			0	1

- dans le système octal, les entiers naturels sont écrits en base 8 avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7.

  Ecrivons $\overline{340721}^{8}$ dans le système décimal.

$$\begin{aligned}\overline{340721}^{8} &= 1\times 8^0+2\times 8^1+7\times 8^2+0\times 8^3+4\times 8^4+3\times 8^5\\ &= 1+16+448+0+16384+98304\\ &= 115153\end{aligned}$$

  Ecrivons 12092 dans le système octal.
  On effectue des divisions successives de 12092 par 8.
  On a : $12092=\overline{27474}^{8}$.

$$\begin{array}{r|r|r|r|r} 12092 & 8 & & & \\ \hline 4 & 1511 & 8 & & \\ \cline{2-3} & 7 & 188 & 8 & \\ \cline{3-4} & & 4 & 23 & 8 \\ \cline{4-5} & & & 7 & 2 \end{array}$$

- Dans le système hexadécimal, les entiers naturels sont écrit en base 16 avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D et F où les lettres A, B, C, D, E et F représentent respectivement 10, 11, 12, 13, 14 et 15.

  Ecrivons $\overline{\text{BAC2021}}^{16}$ dans le système décimal.

$$\begin{aligned}\overline{\text{BAC2021}}^{16} &= 1\times 16^0+2\times 16^1+0\times 16^2+2\times 16^3+12\times 16^4+10\times 16^5+11\times 16^6\\ &= 1+32+8192+786432+10485760+184549376\end{aligned}$$

$$\overline{\text{BAC2021}}^{16} = 195829793$$

  Ecrivons 2021 dans le système hexadécimal.
  On effectue des divisions successives de 2021 par 16.
  On a : $2021=\overline{\text{7E5}}^{16}$.

$$\begin{array}{r|r|r} 2021 & 16 & \\ \hline 5 & 126 & 16 \\ \cline{2-3} & 14 & 7 \end{array}$$

3. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

3.1. Multiples et diviseurs d'un entier relatif

Définition

Soit a et b entiers relatifs.
On dit que a est un **multiple** de b s'il existe un entier relatif k tel que : $a=bk$.
Si de plus $b\neq 0$, alors on dit que b est un **diviseur** de a ou que b **divise** a.

Exemples

- On a : $35=5\times 7$. Donc 35 est un multiple de 7 et 7 divise 35.
- On a : $-26=-2\times 13$. Donc -26 est un multiple de 13 et 13 un diviseur de -26.

Propriété 1

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. Si b divise a, alors $|b|\leq |a|$.

Propriétés 2

Soit a, b et c trois entiers relatifs tels que $a\neq 0$ et $b\neq 0$.
- a divise a ;
- si a divise b et b divise a, alors $a=b$ ou $a=-b$;
- si a divise b et b divise c, alors a divise c.

Propriété 3

Soit a, b et c trois entiers relatifs tels que $a \neq 0$.
Si a divise b et b divise c, alors pour tous entiers relatifs p et q, on a : a divise $pb + qc$.

Exemples

- Justifions que la somme ou la différence de deux entiers relatifs pairs est un entier relatif pair.
  Soit a et b deux entiers relatifs pairs. Alors 2 divise a et 2 divise b. Donc 2 divise $a+b$ et $a-b$ et ainsi $a+b$ et $a-b$ sont deux entiers relatifs pair.
  Par conséquent, la somme ou la différence de deux entiers relatifs pairs est un entier relatif pair.
- Justifions que le produit d'un entier relatif par un entier relatif pair est un entier relatif pair.
  Soit a un entier relatif et b entier relatif pair. Alors 2 divise b. Donc 2 divise ab et ainsi ab est un entier relatif pair.
  Par conséquent, le produit d'un entier relatif par un entier relatif pair est un entier relatif pair.

Ensemble des multiples d'un entier relatif

Soit a un entier naturel. Les multiples d'un entier naturel a sont les nombres de la forme ka, où $k \in \mathbb{Z}$.

Notation

L'ensemble des multiples de a est l'ensemble noté $a\mathbb{Z}$.

Remarque

- Pour tout entier naturel a, on a : $a\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$.
- Pour entier relatif $a \in \mathbb{Z}$, $a\mathbb{Z} = -a\mathbb{Z} = |a|\mathbb{Z}$

Exemples

- $0\mathbb{Z} = \{0\}$
- $1\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$
- $-3\mathbb{Z} = \{\cdots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \cdots\}$
- $4\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z}$

Propriétés 4

Soit a un entier naturel.
- $0 \in a\mathbb{Z}$;
- Pour tous éléments p et q de $a\mathbb{Z}$, on a : $p - q \in a\mathbb{Z}$.

Vocabulaire.

Pour résumer ses propriétés, on dit que $(a\mathbb{Z}, +)$ est un **sous-groupe** de $\mathbb{Z}$.

Ensemble des diviseurs d'un entier relatif

Notation

Soit a un entier relatif. On note $\mathscr{D}(a)$ l'ensemble des diviseurs de a.

- Tout entier relatifs non nuls divise 0 donc $\mathscr{D}(0) = \mathbb{Z}^*$.
- Soit a un entier relatif non nul.
  Justifions que $\mathscr{D}(a)$ est un ensemble fini non vide.
  On a : a divise a. Donc $a \in \mathscr{D}(a)$ et ainsi $\mathscr{D}(a)$ est non vide.
  Soit b un diviseur de a. Alors $|b| \leq |a|$ et donc $-|a| \leq b \leq |a|$. Ainsi $\mathscr{D}(a)$ est borné.
  $\mathscr{D}(a)$ étant une partie non vide et borné de $\mathbb{Z}$, $\mathscr{D}(a)$ admet un plus petit élément et un plus grand élément. On en déduit que $\mathscr{D}(a)$ est un ensemble non vide et fini.

3.2. Congruence modulo n ($n \in \mathbb{N}^*$)

Définition

Soit n entier naturel non nul, a et b deux entiers relatifs.
On dit que a est **congru à** b **modulo** n si $a - b$ est multiple de n. On note $a \equiv b[n]$.

Vocabulaire.

On a ainsi une relation dite **relation de congruence modulo n**.

Exemples

- $23 \equiv 3[5]$ car $23 - 3 = 20$ et 20 est un multiple de 5 ;
- $121 \equiv 0[11]$ car $121 - 0 = 121$ et 121 est un multiple de 11 ;
- $25 \equiv 4[7]$ car $25 - 4 = 21$ et 21 est un multiple de 7 ;
- $-14 \equiv 1[3]$ car $-14 - 1 = -15$ et -15 est un multiple de 3.

Remarque

- $a \equiv 0[n] \iff a$ est un multiple de n ;
- $a \equiv b[n] \iff a - b$ est un multiple de n ;
- si r est le reste de la division euclidienne de a par n, alors $a \equiv r[n]$.

Propriétés 1

Soit n un entier naturel non nul, a, b et c des entiers relatifs. On a :
- $a \equiv a[n]$ (la relation de congruence modulo n est réflexive) ;
- $a \equiv b[n] \Longrightarrow b \equiv a[n]$ (la relation de congruence modulo n est symétrique) ;
- $(a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]) \Longrightarrow a \equiv c[n]$ (la relation de congruence modulo n est transitive).

Vocabulaire.

Pour résumer ces propriétés, on dit que la relation de congruence modulo n est une **relation d'équivalence**.

Propriété 2

Soit n un entier relatif non nul, a et a' deux entiers relatifs, r et r' les restes respectifs des divisions euclidiennes de a et a' par n.
On a : $a \equiv a'[n] \iff r = r'$.

Exemple

Déterminons l'ensemble des valeurs de l'entier naturel x pour lesquelles on a : $\overline{73}^8 \equiv \overline{2x3}^4[13]$.
Le nombre $\overline{73}^8$ écrit en base 8 est égal au nombre 59 dans la système décimal et on a : $59 \equiv 7[13]$.
Le nombre $\overline{2x3}^4$ écrit en base 4 est égal au nombre $35 + 4x$ avec x élément de $\{0, 1, 2, 3\}$.
Soit r le reste de division euclidienne de $35 + 4x$ par 13.
Les valeurs possibles de r sont énumérées dans le tableau ci-contre.

x	0	1	2	3
$35 + 4x$	35	39	43	47
r	9	0	4	8

Comme $\overline{73}^8 \equiv \overline{2x3}^4[13]$ et $r \neq 7$, on conclut que l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a $\overline{73}^8 \equiv \overline{2x3}^4[13]$ est vide.

Propriétés 3

Soit n un entier naturel non nul, a, a', b, b' quatre entiers naturels.
• Si $a \equiv a'[n]$ et $b \equiv b'[n]$, alors $a+b \equiv a'+b'[n]$.
• Si $a \equiv a'[n]$ et $b \equiv b'[n]$, alors $ab \equiv a'b'[n]$.

Vocabulaire.

On dit que la relation de congruence modulo n est **compatible** avec l'addition et la multiplication.

Remarque

Si k est un entier naturel non nul, on a : $a \equiv a'[n] \implies a^k \equiv a'^k[n]$.

Exemple

On pose $a = 137$ et $b = 80$.
Déterminons le reste de la division euclidienne de chacun des nombres a^3b^2 et $22a^3b^2 - 7b$ par 14.
On a : $137 = 9 \times 14 + 1$ et $80 = 5 \times 14 + 10$. Donc $a \equiv 11[14]$ et $b \equiv 10[14]$.

• a^3b^2

$$\begin{aligned}\begin{cases} a \equiv 11[14] \\ b \equiv 10[14] \end{cases} &\implies \begin{cases} a^3 \equiv 1331[14] \\ b^2 \equiv 100[14] \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} a^3 \equiv 1[14] \\ b^2 \equiv 2[14] \end{cases} \\ &\implies a^3b^2 \equiv 1 \times 2[14] \\ &\implies a^3b^2 \equiv 2[14]\end{aligned}$$

• $22a^3b^2 - 7b$

$$\begin{aligned}\begin{cases} a^3b^2 \equiv 2[14] \\ b \equiv 10[14] \end{cases} &\implies \begin{cases} 22a^3b^2 \equiv 44[14] \\ -7b \equiv -70[22] \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} 22a^3b^2 \equiv 2[14] \\ -7b \equiv 0[14] \end{cases} \\ &\implies 22a^3b^2 - 7b \equiv 2+0[14] \\ &\implies 22a^3b^2 - 7b \equiv 2[14]\end{aligned}$$

Définition

Soit a un entier relatif.
On appelle **classe** de a pour la relation de congruence modulo n, le sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ constitué des entiers relatifs qui sont congrus à a modulo n.
On la note : $\overline{a}$ ou $cl(a)$ ou encore $\dot{a}$.

Notation

L'ensemble de toutes les classes pour la relation de congruence modulo n est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et se lit $\mathbb{Z}$ **quotienté** $n\,\mathbb{Z}$.

Exemples

Pour la relation de congruence modulo 3, déterminons les ensembles suivants.

• $\overline{10}$

$$\begin{aligned}\overline{10} &= \{b \in \mathbb{Z}, b \equiv 10[3]\} \\ &= \{b \in \mathbb{Z}, b - 10 = 3k, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{b \in \mathbb{Z}, b = 10 + 3k, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{b \in \mathbb{Z}, b = 1 + 3(k+1), k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{1 + 3t, t \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

$\overline{10} = \overline{1}$

• $\overline{-7}$

$$\begin{aligned}\overline{-7} &= \{b \in \mathbb{Z}, b \equiv -7[3]\} \\ &= \{b \in \mathbb{Z}, b + 7 = 3k, k \in k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{b \in \mathbb{Z}, b = -7 + 3k, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{b \in \mathbb{Z}, b = 2 + 3(k-3), k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{2 + 3t, t \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

$\overline{-7} = \overline{2}$

Remarque

Si le reste de la division euclidienne de a par n est r, alors on a : $\overline{a} = \overline{r}$.

Exemple
Soit n un entier naturel non nul. Déterminons $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
On a : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{a}, a \in \mathbb{Z}\}$.
Soit a un entier relatif et r le reste de la division euclidienne de a par n.
Alors $\overline{a} = \overline{r}$ et $r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\overline{r}, r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}\right\}$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\right\}$

3.3. Utilisation de congruence modulo n ($n \in \mathbb{N}$)

Critère de divisibilité par 2, 3, 5, 9 et 11

Soit a un entier relatif non nul et $\overline{a_p a_{p-1} \cdots a_1 a_0}$ son écriture décimal.
On a : $a = a_0 + a_1 10^1 + a_2 10^2 + \cdots + a_{p-1} 10^{p-1} + a_p 10^p = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{p} a_k 10^k$.

Critère de divisibilité par 2
On a : $10 \equiv 0[2]$ donc pour tout entier naturel k non nul, on a : $10^k \equiv 0[2]$ et $a_k 10^k \equiv 0[2]$.
D'où $\sum\limits_{k=1}^{p} a_k 10^k \equiv 0[2] \implies a_0 + \sum\limits_{k=1}^{p} a_k 10^k \equiv a_0[2]$.
On en déduit que si a_0 est divisible par 2, alors a est divisible par 2.

Critère de divisilité par 3
On a : $10 \equiv 1[3]$ donc pour tout entier naturel k, on a : $10^k \equiv 1[3]$ et $a_k 10^k \equiv a_k[3]$.
D'où $\sum\limits_{k=0}^{p} a_k 10^k \equiv \sum\limits_{k=0}^{p} a_k[3]$.
On en déduit que si $\sum\limits_{k=0}^{p} a_k$ est divisible par 3, alors a est divisible par 3.

Critère de divisibilité par 5
On a : $10 \equiv 0[5]$ donc pour tout entier naturel k non nul, on a : $10^k \equiv 0[5]$ et $a_k 10^k \equiv 0[5]$.
D'où $\sum\limits_{k=1}^{p} a_k 10^k \equiv 0[5] \implies a_0 \sum\limits_{k=1}^{p} a_k 10^k \equiv a_0$.
On en déduit que si a_0 est divisible par 5, alors a est divisible par 5.

Critère de divisibilité par 9
On a : $10 \equiv 1[9]$ donc pour tout entier naturel k, on a : $10^k \equiv 1[9]$ et $a_k 10^k \equiv a_k[9]$.
D'où $\sum\limits_{k=0}^{p} a_k 10^k \equiv \sum\limits_{k=0}^{p} a_k[9]$.
On en déduit que si $\sum\limits_{k=0}^{p} a_k$ est divisible par 9, alors a est divisible par 9.

Critère de divisibilité par 11
On a : $10 \equiv -1[11]$ donc pour tout entier naturel k, on a : $10^k \equiv (-1)^k[11]$ et $a_k 10^k \equiv (-1)^k a_k[11]$.
D'où $\sum\limits_{k=0}^{p} a_k 10^k \equiv \sum\limits_{k=0}^{p} (-1)^k a_k[11]$.
On en déduit que si $\sum\limits_{k=0}^{p} (-1) a_k$ est divisible par 11, alors a est divisible par 11.

Recherche du reste d'une division euclidienne

1. Déterminons le reste de la division euclidienne de 9^{2022} par 11.
   On a : $9^0 \equiv 0[1]$, $9^1 \equiv 9[11]$, $9^2 \equiv 4[11]$, $9^3 \equiv 3[11]$, $9^4 \equiv 5[11]$ et $9^5 \equiv 1[11]$.
   On a : $2022 = 404 \times 5 + 2$ et donc $9^{2022} = (9^5)^{404} \times 9^2$.
   $$\begin{aligned} 9^5 \equiv 1[11] &\Longrightarrow (9^5)^{404} \equiv 1[11] \\ &\Longrightarrow (9^5)^{404} \times 9^2 \equiv 9^2[11] \\ &\Longrightarrow 9^{2022} \equiv 4[11] \text{ car } 9^2 \equiv 4[11] \end{aligned}$$
   Donc le reste de la division euclidienne de 9^{2022} par 11 est 4.
2. Déterminons, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le resre de la division euclidienne de 7^n par 9.
   On a : $7^0 \equiv 1[9]$, $7^1 \equiv 7[9]$, $7^2 \equiv 4[9]$ et $7^3 \equiv 1[9]$.
   Les valeurs possibles de la division euclidienne de n par 3 sont : 0, 1, et 2.
   - Si $n = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$), alors $(7^3)^k \equiv 1[9]$ et donc $7^n \equiv 1[9]$.
   - Si $n = 3k+1$ ($k \in \mathbb{N}$), alors $7^{3k} \times 7 \equiv 7[9]$ et donc $7^n \equiv 7[9]$.
   - Si $n = 3k+2$ ($k \in \mathbb{N}$), alors $7^{3k+1} \times 7 \equiv 7^2[9]$ et donc $7^n \equiv 4[9]$.

4. PPCM et PGCD de deux entiers relatifs

4.1. PPCM de deux entiers entiers relatifs

Définition

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.
On appelle **plus petit commun multiple** de a et b et on note $\mathrm{PPCM}(a,b)$, le plus petit élément strictement positif de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

Remarques

- Pour tous entiers relatifs non nuls a et b, on a : $\mathrm{PPCM}(a,b) = \mathrm{PPCM}(|a|,|b|)$.
- Pour tous entiers naturels a et b, on a : $\mathrm{PPCM}(a,b) = a \iff a \in b\mathbb{Z}$.
- Pour tous entiers naturels a et b, on a : $\mathrm{PPCM}(a,b) = \mathrm{PPCM}(b,a)$.

Exemples

- $\mathrm{PPCM}(3,4)$
  On a :
  $3\mathbb{Z} = \{\cdots,-27,-24,-21,-18,-15,-12,-9,-6,-3,0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,\cdots\}$
  $4\mathbb{Z} = \{\cdots,-36,-32,-28,-24,-20,-16,-12,-8,-4,0,4,8,12,16,20,24,28,32,36,40,\cdots\}$
  On a : $3\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z} = \{\cdots,-24,-12,0,12,24,36,48,\cdots\}$.
  Donc $\mathrm{PPCM}(3,4) = 12$.
- $\mathrm{PPCM}(15,10)$
  On a :
  $15\mathbb{Z} = \{\cdots,-90,-75,-60,-45,-30,-15,0,15,30,45,60,75,90,105,120,\cdots\}$
  $10\mathbb{Z} = \{\cdots,-60,-50,-40,-30,-20,-10,0,10,20,30,40,50,60,70,80,\cdots\}$
  On a : $15\mathbb{Z} \cap 10\mathbb{Z} = \{\cdots,-60,-30,0,30,60,90,120,\cdots\}$.
  Donc $\mathrm{PPCM}(15,10) = 30$.

Propriété 1

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et μ leur PPCM.
Alors on a : $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mu\mathbb{Z}$.

Exemples

- On a : $\text{PPCM}(3,4) = 12$ et donc $3\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z} = 12\mathbb{Z}$.
- On a : $\text{PPCM}(15,10) = 30$ et donc $15\mathbb{Z} \cap 10\mathbb{Z} = 30\mathbb{Z}$.

Propriété 2

Soit a, b et k trois entiers naturels non nuls.
On a : $\text{PPCM}(ka, kb) = k\text{PPCM}(a,b)$.

Exemple

$$\begin{aligned}\text{PPCM}(18,24) &= \text{PPCM}(3\times 6, 4\times 6)\\ &= 6\text{PPCM}(3,4)\\ &= 6\times 12\\ \text{PPCM}(18,24) &= 72\end{aligned}$$

4.2. PGCD de deux entier naturels

On note $\mathscr{D}(a,b)$ l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
On a : $\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b)$.

Définition

Soit a et b deux relatifs non nuls.
On appelle **plus grand commun diviseur** de a et b et on note $\text{PGCD}(a,b)$, le plus grand élément positif de $\mathscr{D}(a,b)$.

Remarques

- Pour tous entiers relatifs non nuls a et b, on a : $\text{PGCD}(a,b) = \text{PGCD}(|a|,|b|)$
- Pour tous entiers naturels non nuls a et b, on a : $\text{PGCD}(a,b) = b \iff b \in \mathscr{D}(a)$.
- Pour tous entiers naturels non nuls a et b, on a : $\text{PGCD}(a,b) = \text{PGCD}(b,a)$.

Exemple

Déterminons $\text{PGCD}(16,-10)$ et $\text{PGCD}(28,25)$.

- $\text{PGCD}(16,-10)$
  On a :
  $\mathscr{D}(16) = \{-16,-8,-4,-2,-1,1,2,4,8,16\}$;
  $\mathscr{D}(-10) = \{-10,-5,-2,-1,1,2,5,10\}$;
  $\mathscr{D}(16,-10) = \{-2,-1,1,2\}$.
  Donc $\text{PCGD}(16,-10) = 2$.
- $\text{PGCD}(25,28)$
  On a :
  $\mathscr{D}(25) = \{-25,-5,-1,1,5,25\}$;
  $\mathscr{D}(28) = \{-28,-14,-7,-4,-2,-1,1,2,4,7,14,28\}$;
  $\mathscr{D}(25,28) = \{-1,1\}$.
  Donc $\text{PGCD}(25,28) = 1$.

Propriété 1

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et δ leur PGCD.
On a : $\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(\delta)$.

Exemples

• On a : $\text{PGCD}(16,-10) = 8$ donc $\mathscr{D}(16,-10) = \mathscr{D}(2)$.

• On a : $\text{PGCD}(25,28) = 1$ donc $\mathscr{D}(25,28) = \mathscr{D}(1)$.

Propriété 2

Soit a, b et k trois entiers naturels non nuls.
On a : $\text{PGCD}(ka,kb) = k\text{PCGD}(a,b)$.

Exemple

Déterminons $\text{PGCD}(16,-10)$.

$$\begin{aligned}\text{PGCD}(16,-10) &= \text{PGCD}(2\times 8, 2\times(-5))\\ &= 2\text{PGCD}(8,-5)\end{aligned}$$

$\text{PGCD}(16,-10) = 2$ car $\text{PGCD}(8,-5) = 1$

Propriété 3

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et δ leur PGCD.
Un entier relatif m est un multiple de δ si et seulement s'il existe deux entiers relatifs u et v deux tels que : $m = au + bv$.

Exemple

Peut-on trouver un couple (x, y) d'entiers relatifs tels que $36x - 50y = 10$?

• Déterminons $\text{PGCD}(36,50)$.

On a :

$\mathscr{D}(36) = \{-36,-18,-12,-9,-6,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$;

$\mathscr{D}(50) = \{-50,-25,-10,-5,-2,-1,1,2,5,10,25,50\}$;

$\mathscr{D}(36,50) = \{-2,-1,1,2\}$.

Donc $\text{PGCD}(36,50) = 2$.

• $10 \in 2\mathbb{Z}$ donc 10 est un multiple de 2.

On en déduit qu'il existe un couple (x, y) d'entiers relatifs tels que $36x - 50y = 10$.

Propriété 4

Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a > b$ et r le reste de la division euclidienne de a par b. On a :

• Si $r = 0$, alors $\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(b)$;

• Si $r \neq 0$, alors $\mathscr{D}(a,b) = \mathscr{D}(b,r)$.

Propriété 5

Soit a et b deux entiers naturels tels que $a > b > 0$ et r le reste de la division euclidienne de a par b.

• Si $r = 0$, alors $\text{PGCD}(a,b) = b$;

• Si $r \neq 0$, alors $\text{PGCD}(a,b) = \text{PGCD}(b,r)$.

Cette propriété propose une nouvelle méthode de recherche du PGCD de deux entiers naturels appelée **algorithme d'Euclide**.

Exemple

Déterminons $\text{PGCD}(374788,9933)$.

$374788 = 37 \times 9933 + \mathbf{7267}$	$\text{PGCD}(374788, 9933) = \text{PGCD}(9933, 7267)$
$9933 = 1 \times 7267 + \mathbf{2666}$	$\text{PGCD}(9933, 7267) = \text{PGCD}(7267, 2666)$
$7267 = 2 \times 2666 + \mathbf{1935}$	$\text{PGCD}(7267, 2666) = \text{PGCD}(2666, 1935)$
$2666 = 1 \times 1935 + \mathbf{731}$	$\text{PGCD}(2666, 1935) = \text{PGCD}(1935, 731)$
$1935 = 2 \times 731 + \mathbf{473}$	$\text{PGCD}(1935, 731) = \text{PGCD}(731, 473)$
$731 = 1 \times 473 + \mathbf{258}$	$\text{PGCD}(731, 473) = \text{PGCD}(473, 258)$
$473 = 1 \times 258 + \mathbf{215}$	$\text{PGCD}(473, 258) = \text{PGCD}(258, 215)$
$258 = 1 \times 215 + \mathbf{43}$	$\text{PGCD}(258, 215) = \text{PGCD}(215, 43)$
$258 = 5 \times 43 + \mathbf{0}$	$\text{PGCD}(215, 43) = 43$

On en déduit que $\text{PGCD}(374788, 9933) = 43$.

Propriété 6

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et distincts.
On a : $\text{PGCD}(a, b) = \text{PCGD}(a - b, b)$.

Exemples

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminons $\text{PGCD}(n+2, n+3)$.

$$\begin{aligned}\text{PGCD}(n+2, n+3) &= \text{PGCD}(n+2, n+3-n-2)\\ &= \text{PGCD}(n+2, 1)\end{aligned}$$

$\text{PGCD}(n+2, n+3) = 1$

2. Déterminons, suivant les valeurs de n, $\text{PGCD}((n+2)^2, n+4)$.

$(n+2)^2 = n^2 + 4n + 4$

$(n+2)^2 = n(n+4) + 4$

Donc on a :

$$\begin{aligned}\text{PGCD}((n+2)^2, n+4) &= \text{PGCD}(n+4, 4)\\ &= \text{PGCD}(n+4-4, 4)\end{aligned}$$

$\text{PGCD}((n+2)^2, n+4) = \text{PGCD}(n, 4)$

Les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de n par 4 sont : 0, 1, 2 et 3.

- Si $n \equiv 0[4]$, alors
  $\text{PGCD}((n+2)^2, n+4) = \text{PGCD}(n, 4)$
  $\text{PGCD}((n+2)^2, n+4) = 4$
- Si $n \equiv 1[4]$, alors
  $\text{PGCD}((n+2)^2, n+4) = \text{PGCD}(4, 1)$
  $\text{PGCD}((n+2)^2, n+4) = 1$
- Si $n \equiv 2[4]$, alors
  $\text{PGCD}((n+2)^2, n+4) = \text{PGCD}(4, 2)$
  $\text{PGCD}((n+2)^2, n+4) = 2$
- Si $n \equiv 3[4]$, alors
  $\text{PGCD}((n+2)^2, n+4) = \text{PGCD}(4, 3)$
  $\text{PGCD}((n+2)^2, n+4) = 1$

4.3. Nombres premiers entre eux

Définition

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.
On dit que a et b sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.

Exemple

• On a : $\text{PGCD}(36, 50) = 2$ donc les nombres 36 et 50 ne sont pas premiers entre eux.

• On a : $\text{PGCD}(2455609, 298) = 1$ donc les nombres 2455609 et 298 sont premiers entre eux.

Remarque

Soit a et b deux entiers non nuls et d un diviseur commun à a et b.
Alors ils existent deux deux entiers relatifs a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$ et on a :
$\text{PGCD}(a, b) = d \times \text{PGCD}(a', b')$.
d est le PGCD de a et b si et seulement si a' et b' sont premiers entre eux.

Théorème de Bézout

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.
a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Exemples

1. Calculons PCDG$(2455609, 298)$.

$2455609 = 298 \times 8240 + 89$	$\text{PGCD}(2455609, 298) = \text{PGCD}(298, 89)$
$298 = 89 \times 3 + 31$	$\text{PGCD}(2455609, 298) = \text{PGCD}(89, 31)$
$89 = 31 \times 2 + 27$	$\text{PGCD}(2455609, 298) = \text{PGCD}(31, 27)$
$31 = 27 \times 1 + 4$	$\text{PGCD}(2455609, 298) = \text{PGCD}(27, 4)$
$27 = 4 \times 6 + 3$	$\text{PGCD}(2455609, 298) = \text{PGCD}(4, 3)$
$4 = 3 \times 1 + 1$	$\text{PGCD}(2455609, 298) = \text{PGCD}(3, 1)$
$3 = 1 \times 3 + 0$	$\text{PGCD}(2455609, 298) = 1$

Donc $\text{PGCD}(2455609, 298) = 1$.

2. Déterminons deux entiers relatifs u et v tels que $2455609u + 298v = 1$.
Pour cela, on utilise les divisions eucliennes précédentes de la dernière à la première.

$$\begin{aligned}
1 &= 4 - 3 \\
&= 4 - (27 - 4 \times 6) \\
&= -27 + 7 \times 4 \\
&= -27 + 7(31 - 27) \\
&= -8 \times 27 + 7 \times 31 \\
&= -8(89 - 31 \times 2) + 7 \times 31 \\
&= -8 \times 89 + 23 \times 31 \\
&= -8 \times 89 + 23(298 - 89 \times 3) \\
&= -77 \times 89 + 23 \times 298 \\
&= -77(2455609 - 298 \times 8240) + 23 \times 298
\end{aligned}$$

$1 = -77 \times 2455609 + 634503 \times 298$
On prend alors $u = -77$ et $v = 634503$.

Théorème de Gauss

Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls.
Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

Exemple

On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) : $26x + 49y = -4$.

1. Justifions que (E) admet de solution et donnons une solution particilière (u, v) de (E).

   On a :
   $49 = 1 \times 26 + 25$

   $26 = 1 \times 25 + 1$

   $25 = 25 \times 1 + 0$

   On a : $\text{PGCD}(26, 49) = 1$ et -4 est un multiple de 1. Donc, d'après la propriété 3 (p. 38), l'équation (E) admet de solution.

   On a :
   $$1 = 26 - 25$$
   $$= 26 - (49 - 1 \times 26)$$
   $$1 = 26 \times 2 - 49$$
   $$-4 = 26 \times (-8) + 49 \times 4$$
   Prenons alors $(u, v) = (-8, 4)$.

2. Résolvons (E).

   - Soit (x, y) une solution de l'équation (E). Alors $26x + 49y = 26(-8) + 49(4)$ soit $26(x+8) = 49(4-y)$ et donc 26 divise $49(4-y)$. Comme 26 et 49 sont premiers entre eux, on a : 26 divise $4-y$ et ainsi on a : $4 - y = 26k$, $k \in \mathbb{Z}$. D'où $y = -26k + 4$, $k \in \mathbb{Z}$ et on a : $26(x+8) = 49 \times 26k$ et donc $x = 49k - 8$.

     En conclusion, si (x, y) est une solution de (E), alors (x, y) s'écrit sous la forme $(49k - 8, -26k + 4)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   - Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a : $26(49k-8) + 49(-26k+4) = -4$. Donc $(49k-8, -26k+4)$ est une solution de (E).

     En conclusion, tout couple de nombres entiers s'écrivant sous la forme de $(49k-8, -26k+4)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est solution de (E).

   En somme, l'ensemble des solutions de (E) est $\{(49k - 8, -26k + 4), k \in \mathbb{Z}\}$.

Propriétés 1

Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls.

- Si a et b sont premiers entre eux et si a et c sont premiers entre eux, alors a et bc sont premiers entre eux.
- Si a et b divisent c et si a et b sont premiers entre eux, alors ab divise c.
- Si a et b sont premiers entre eux, alors $\text{PPCM}(a, b) = |ab|$.

Propriété 2

Soit n un entier naturel non nul, a, b et c deux entiers relatifs tels que $a \neq 0$.
Si a et n sont premiers entre eux et $ab \equiv ac[n]$, alors $b \equiv c[n]$.

Exemple

Résoudre, dans $\mathbb{Z}$, l'équation $3x \equiv 1[5]$.

Propriété 3

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
On a : $\text{PPCM}(a, b) \times \text{PGCD}(a, b) = ab$.

Exemples

1. Déterminons les PGCD et PPCM de 107352 et 157680.

$$\begin{aligned}
157680 &= 1\times 107352+50328\\
107352 &= 2\times 50328+6696\\
50328 &= 7\times 6696+3456\\
6696 &= 1\times 3456+3240\\
3456 &= 1\times 3240+216\\
3240 &= 15\times 216+0
\end{aligned}$$

On a donc : $\text{PGCD}(107352, 157680) = 216$.

Comme $\text{PPCM}(107352, 157680)\times \text{PGCD}(107352, 157680) = 107352\times 157680$, on a :

$\text{PPCM}(107352, 157680) = \frac{16927263360}{216} = 78366960$.

2. Résolvons, dans $\mathbb{N}^2$, le système d'équations :

$$(\text{S}) : \begin{cases}\text{PPCM}(x, y) = 168\\ xy = 1008\end{cases}.$$

$$\begin{aligned}
\begin{cases}\text{PPCM}(x, y) = 168\\ xy = 1008\end{cases} &\iff \begin{cases}\text{PGCD}(x, y) = \frac{1008}{168}\\ xy = 1008\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x = 6k\\ y = 6k'\\ 36kk' = 1008\\ \text{PGCD}(k, k') = 1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x = 6k\\ y = 6k'\\ kk' = 28\\ \text{PGCD}(k, k') = 1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}x = 6k\\ y = 6k'\\ (k, k') \in \{(1;28), (4;7), (7;4), (28, 1)\}\end{cases}\\
&\iff (x, y) \in \{(1\times 6;28\times 6), (4\times 6;7\times 6), (7\times 6;4\times 6), (28\times 6;1\times 6)\}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions du systèmes (S) est : $\{(168;6), (24;42), (42;24), (6, 168)\}$.

5. Nombres premiers

Définition

On appelle **nombre premier** tout nombre entier naturel ayant exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Par convention, 0 et 1 ne sont pas des nombres premiers.

Exemples

- 2, 3, 5 et 7 sont des nombres premiers.
- 111, 213 et 275 ne sont pas des nombres premiers.

Propriété 1

Tout entier naturel différent de 0 et de 1 admet au moins un diviseur premier.

Exemples

- Les nombres premiers 2 et 3 sont des diviseurs de 12, 18 et 24.
- Le nombre premier 19 est un diviseur de 19.

Propriété 2

Il existe une infinité de nombres premiers.

Propriété 3

Tout entier naturel n, autre que 0 et 1 et non premier, admet au moins un diviseur premier d tel que $1 < d^2 \leq n$.

Exemple

Montrons que le nombre 2017 est premier.
On a : $\sqrt{2017} \simeq 44,9110$.
Raisonnons par l'absurde en supposant que 2017 n'est pas premier. Alors 2017 admet au moins un diviseur premier vérifiant $1 < d < 44,91110$.
Les nombres premiers inférieurs à 44,9110 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 41 et 43.
Soit r le reste de division euclidienne de 2017 par d.

d	2	3	5	7	11	13	17	23	29	31	37	41	43
r	1	1	2	1	4	2	11	16	16	2	19	8	39

Donc 2017 n'admet pas de diviseur premier d vérifiant $1 < d < 44,9110$: ce qui contredit l'hypothèse.
On en déduit que 2017 est un nombre premier.

Théorème

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- Il existe des nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_k$ et des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tels que : $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$.
- Cette décomposition est unique.

Exemples

1. Déterminons les diviseurs positifs de 60.
   On a : $60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$.
   Donc les diviseurs positifs de 60 sont les entiers naturels ayant la forme $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$ où $\alpha \in \{0,1,2\}$, $\beta \in \{0,1\}$ et $\gamma \in \{0,1\}$.

(α,β,γ)	(0, 0, 0)	(1, 0, 0)	(2, 0, 0)	(0, 1, 0)	(1, 1, 0)	(2, 1, 0)	(0, 0, 1)	(1, 0, 1)	(2, 0, 1)	(0, 1, 1)	(1, 1, 1)	(2, 1, 1)
$2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$	1	2	4	3	6	12	5	10	20	15	30	60

   Alors les diviseurs positifs de 60 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 et 60.
2. Déterminons les PPCM et PGCD de 702 et 360.
   On a : $702 = 2^1 \times 3^3 \times 13^1$ et $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$.
   Donc on a :

$\text{PPCM}(702,360) = 2^3 \times 3^3 \times 5^1 \times 13^1$ $\text{PGCD}(702,360) = 2^1 \times 3^1$
$\text{PPCM}(702,360) = 14040$ $\text{PGCD}(702,360) = 6$

6. Ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{N} - \{0,1\})$

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. On a : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{n-1}\}$.

6.1. Opérations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Définition

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On définit l'addition $\dot{+}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2, \overline{x} \dot{+} \overline{y} = \overline{x+y}$.

Exemples

Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on a :

$\overline{7} \dot{+} \overline{2} = \overline{7+2}$
$= \overline{9}$
$\overline{7} \dot{+} \overline{2} = \overline{0}$

$\overline{-10} \dot{+} \overline{9} = \overline{-10+9}$
$= \overline{-1}$
$\overline{-10} \dot{+} \overline{9} = \overline{2}$

Définition

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On définit la multiplication $\dot{\times}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2, \overline{x} \dot{\times} \overline{y} = \overline{x \times y}$.

Exemples

Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on a :

$\overline{5} \dot{\times} \overline{8} = \overline{5 \times 8}$
$= \overline{40}$
$\overline{7} \dot{\times} \overline{2} = \overline{1}$

$\overline{-11} \dot{\times} \overline{-13} = \overline{-11 \times (-13)}$
$= \overline{143}$
$\overline{-11} \dot{\times} \overline{-13} = \overline{2}$

Propriété

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ est un anneau commutatif.

6.2. Corps

Définition

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On dit que l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ est un **corps** si pour tout élément $\overline{x}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ différent de $\overline{0}$, il existe un élément $\overline{y}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ différent de $\overline{0}$ tel que $\overline{x} \dot{\times} \overline{y} = \overline{1}$.

Vocabulaire.

On dit que $\overline{y}$ est l'inverse de $\overline{x}$.

Exemple

1. Dresser la table de multiplication dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
2. Est-ce que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est un coprs ?
3. Résoudre, dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, l'équation $\overline{6}x + \overline{7} = \overline{5}$.

Propriété

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On a : $\left(\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}, \dot{+}, \dot{\times}\right)$ est un corps $\Longleftrightarrow$ p est un nombre premier.

Exemple

1. Trouver un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que $169u + 25v = 1$.
2. Déterminer l'inverse de 25 dans $\mathbb{Z}/_{169\mathbb{Z}}$.
3. Résoudre, dans $\mathbb{Z}/_{169\mathbb{Z}}$, l'équation $\overline{2222}x + \overline{231} = \overline{0}$.

Séquence 3 Nombres complexes

1. Etude algébrique

1.1. Notion de nombres complexes

Définition et propriétés

Définition

On appelle **nombre complexe** tout nombre de la forme $a+\mathrm{i}b$, tel que a et b sont des nombres réels et $\mathrm{i}^2=-1$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Vocabulaire et notation.

Soit z un nombre complexe tel que : $z=a+\mathrm{i}b$.

- L'écriture $a+\mathrm{i}b$ est appelé **forme algébrique** de z.
  Le nombre réel a est appelé **partie réelle** de z et noté $\mathrm{Re}(z)$.
  Le nombre réel b est appelé **partie imaginaire** de z et noté $\mathrm{Im}(z)$.
- Si $b=0$, alors $z=a$, z est un nombre réel.
  Tout nombre réel est un nombre complexe. Ainsi $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.
- Si $a=0$, alors $z=\mathrm{i}b$ le nombre z est dit **imaginaire**.
  L'ensemble des nombres imaginaires est noté $\mathrm{i}\mathbb{R}$.
- Si $a=0$ et $b\neq 0$, alors $z=\mathrm{i}b$ et z est dit **imaginaire pur**.
  L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $\mathrm{i}\mathbb{R}^*$.

Exemples

- Les nombres 0, $-\mathrm{i}$, $2-\sqrt{3}\mathrm{i}$ et $1+\mathrm{i}$ sont des nombres complexes.
- Les nombres 0, $12\mathrm{i}$, $-\mathrm{i}\sqrt{3}$, $-7\mathrm{i}$ et $-\mathrm{i}$ sont des nombres complexes imaginaires.
- Les nombres $12\mathrm{i}$, $-\mathrm{i}\sqrt{3}$, $-7\mathrm{i}$ et $-\mathrm{i}$ sont des nombres complexes imaginaires purs.

Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes.
- $z=z' \iff \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')$;
- $z=0 \iff \mathrm{Re}(z)=0$ et $\mathrm{Im}(z)=0$.

Représentation de nombre complexe

Le plan $\mathscr{P}$ est muni du repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\vec{e_1},\vec{e_2})$.

- Tout point $\mathrm{M}(a,b)$ du plan est appelé **point image** du nombre complexe $a+\mathrm{i}b$ et le nombre $a+\mathrm{i}b$ est appelé **affixe** du point M.
- Tout vecteur $\vec{u}(a,b)$ est appelé **vecteur image** du nombre complexe $a+\mathrm{i}b$ et le nombre complexe $a+\mathrm{i}b$ est appelé **affixe** du nombre complexe $\vec{u}$.
- Le plan muni du repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\vec{e_1},\vec{e_2})$ est appelé **plan complexe**.
  Un point M d'affixe z de ce plan est noté $\mathrm{M}(z)$.
- Les droites de repères $(\mathrm{O},\vec{e_1})$ et $(\mathrm{O},\vec{e_2})$ sont respectivement appelé **axe réel** et **axe imaginaire**.

Exemples

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\vec{e_1},\vec{e_2})$.

Placer les points images de chacun des nombres complexes suivants : i, $2-\mathrm{i}$, $1+\mathrm{i}$ et -1.

1.2. Opérations dans $\mathbb{C}$

Addition et multiplication

Définitions

Soit z et z' deux nombres complexes tels que : $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$.
- La somme de z et z' est le nombres complexe : $z + z' = (a + a') + \mathrm{i}(b + b')$.
- Le produit de z et z' est le nombre complexe : $zz' = (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + a'b)$.

Exemple

Soit z et z' deux nombres complexes définies par : $z = 3+2\mathrm{i}$ et $z' = 1-\mathrm{i}$.
Calculer $z+3z'$, zz' et z^2.

Propriété 1

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Remarque

L'inverse d'un nombre complexe non nul d'écriture algébrique $a+\mathrm{i}b$ est le nombre complexe : $\frac{1}{a+\mathrm{i}b} = \frac{a}{a^2+b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a^2+b^2}$.

Propriété 2

Soit z et z' deux nombres complexes.
On a : $zz' = 0$ si et seulement si $z = 0$ ou $z' = 0$.

Exemple

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $(1-2\mathrm{i})z^2 - \mathrm{i}(1-2\mathrm{i})z = 0$.

Soustraction et division

Définitions

Soit z et z' deux nombres complexes.
- La différence de z par z' est le nombre complexe : $z - z' = z + (-z')$.
- Si $z' \neq 0$, alors le quotient de z par z' est le nombre complexe : $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$.

Exemple

Soit z et z' deux nombres complexes définies par : $z = 1-\mathrm{i}$ et $z' = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{i}$.
Calculer $z - 4z'$ et $\frac{z}{z'}$.

Produits remarquables

Propriétés 3

Soit z et z' deux nombres complexes et n un entier naturel non nul.
- $(z+z')^2 = z^2 + 2zz' + z'^2$;
- $(z-z')^2 = z^2 - 2zz' + z'^2$;
- $(z-z')(z+z') = z^2 - z'^2$;
- $(z+z')^n = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i z^i z'^{n-i}$ (formule du binôme de Newton).

Exemple

Soit z et z' deux nombres complexes $z = 5-2\mathrm{i}$ et $z' = 1+\mathrm{i}$.
Calculer z^2, z'^2, zz', $(z+z')(3z-2z')$ et z'^5.

1.3. Conjugué et module d'un nombre complexe

Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Soit z un nombre complexe d'écriture algébrique $a+\mathrm{i}b$.
On appelle **conjugué de z** le nombre complexe, noté $\overline{z}$, tel que $\overline{z} = a-\mathrm{i}b$.

Exemple

Déterminer le conjugué de chacun des nombres complexes suivantes : 2, $\sqrt{2}-\mathrm{i}$ et $\frac{4}{3+\mathrm{i}}$.

Propriétés 1

Soit z un nombre complexe d'écriture algébrique $a+\mathrm{i}b$.

- $z\overline{z} = a^2+b^2$;
- $z+\overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$;
- z est un réel si et seulement si $z = \overline{z}$;
- $z\overline{z} = a^2+b^2$;
- $z-\overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)$;
- z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$ et $z \neq 0$.

Propriétés 2

Soit z et z' deux nombres complexes.

- $\overline{\overline{z}} = z$;
- $\overline{-z} = -\overline{z}$;
- $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$;
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$;
- si $(z \neq 0)$, alors $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$;
- si $(z \neq 0)$, alors $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$;
- si $(z \neq 0)$, alors $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Module d'un nombre complexe

Définition

Soit z un nombre complexe d'écriture algébrique $a+\mathrm{i}b$.
On appelle **module de z** le nombre réel positif, noté $|z|$, tel que $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$.

Interprétation graphique

- Si z est l'affixe d'un point M, alors $|z| = \mathrm{OM}$.
- Si z est l'affixe d'un vecteur $\vec{u}$, alors $|z| = \left|\left|\vec{u}\right|\right|$.
- Si z_A et z_B sont les affixes respectives de deux points A et B, alors $|z_\mathrm{A}-z_\mathrm{B}| = \mathrm{AB}$.

Propriétés 3

Soit z et z' deux nombres complexes et n un entier naturel relatif. On a :

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
- $\left|\overline{z}\right| = |z| = |-z|$;
- $\left|zz'\right| = |z|\left|z'\right|$;
- si $(z \neq 0)$, alors $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$;
- si $(z \neq 0)$, alors $|z^n| = |z|^n$;
- si $(z \neq 0)$, alors $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z|'}$;
- $\left|z+z'\right| \leq |z|+|z|'$ (Inégalité triangulaire).

2. Etude trigonométrique

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

2.1. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Argument d'un nombre complexe non nul

Définition

Soit z un nombre réel non nul et M le point image de z.

On appelle **argument** de z toute mesure de l'angle de $\widehat{(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM})}$.

Notation

Un argument de z est noté $\arg(z)$.

Interprétation géométrique

- Si z est l'affixe d'un vecteur $\vec{u}$, alors $\arg(z)$ est une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\vec{e_1}, \vec{u})}$.
- Si z_A etz_B sont les affixes respectives de deux points A et B, alors $\arg(z_B - z_A)$ est une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\vec{e_1}, \overrightarrow{AB})}$.
- Si z_A, z_B, z_C et z_D sont les affixes respectives de quatre points A, B, C et D, alors $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ est une mesure de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})}$

Remarque

Si α est aussi un argument de z, alors on a : $\arg(z) \equiv \alpha[2\pi]$.

Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Définition

Soit z un nombre complexe de module r et d'argument α.
On appelle **forme trigonométrique** de z l'écriture : $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Propriété 1

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.
On a : $z = z'$ si et seulement si $|z| = |r'|$ et $\arg(z) \equiv \arg(z')[2\pi]$.

Propriétés 2

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls et n un entier naturel non nul.

- $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$;
- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$;
- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$;
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi]$;
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$;
- $\arg(z^n) \equiv n \times \arg(z)[2\pi]$.

Propriété 3

Soit α un nombre réel et n un entier naturel non nul.
On a : $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$.

Cette égalité est appelée **formule de Moivre**.

2.2. Notation exponentielle d'un nombre complexe

Définition

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument α.
On appelle **forme exponentielle** de z l'écriture : $z = re^{i\alpha}$.

Propriétés 1

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $z = re^{i\alpha}$ et $z = r'e^{i\alpha'}$ avec α, α' deux nombres, r et $'r$ deux nombres réels strictement positifs. Soit n un entier naturel non nul.

- $zz' = rre^{i(\alpha+\alpha')}$;
- $-z = re^{i(\pi+\alpha)}$;
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\alpha}$;
- $\overline{z} = \frac{1}{r}e^{-i\alpha}$;
- $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\alpha-\alpha)}$;
- $z^n = r^n e^{in\alpha}$.

Propriétés 2

Soit α un nombre réel.
On a : $\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$.

Ces égalités sont appelées **formules d'Euler**.

2.3. Racines n-ième d'un nombre complexe non nul

Définition

Soit Z un nombre complexe non nul et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On appelle **racine n-ième** de Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

Propriété 1

Soit $re^{i\alpha}$ un nombre complexe non nul ($r > 0$) et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- $re^{i\alpha}$ admet n racines n-ièmes z_k telles que $z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.
- Si $n \geq 3$, alors les points images de ces racines n-ièmes sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscriptible dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

Remarque

La somme des n racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul est nulle.

3. Utilisation des nombres complexes

3.1. Résolution d'équations de degré n ($n \geq 3$) dans $\mathbb{C}$

La démarche de résolution d'équations de degré n dans $\mathbb{C}$ est similaire à la résolution de degré n dans $\mathbb{R}$.

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^4 + (5-2i)z^3 + (8-10i)z^2 + (6-16i)z - 12i = 0$ sachant qu'elle admet une solution réel et une solution imaginaire pur.
Posons $P(z) = z^4 + (5-2i)z^3 + (8-10i)z^2 + (6-16i)z - 12i$.

- Déterminons un réel a, une solution de l'équation (E).

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(z)=0 &\iff (a^4+5a^3+8a^2+6a)+\mathrm{i}(-2a^3-10a^2-16a-12)=0\\
&\iff (a^4+5a^3+8a^2+6a)-2\mathrm{i}(a^3+5a^2+8a+6)=0\\
&\iff \begin{cases} a^4+5a^3+8a^2+6a=0\\ -2(a^3+5a^2+8a+6)=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} a(a^3+5a^2+8a+6)=0\\ a^3+5a^2+8a+6=0\end{cases}
\end{aligned}$$

-

3.2. Linéarisation d'un polynôme trigonométrique

3.3. Configuration du plan et nombres complexes

Pour déterminer la configuration de trois ou quatre points, on peut déterminer une interprétation géométrique puis complexe de cette configuration.

Exemples

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé.
Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}}=2$, $z_{\mathrm{B}}=2\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{C}}=\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_{\mathrm{D}}=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$.

- Montrons que les points A, B, C et D sont cocycliques.

A, B, C et D sont cocycliques $\iff$ le quadrilatère ABCD est inscriptible dans un cercle

3.4. Lieux géométriques et nombres complexes

Séquence 4 Continuité

1. Continuité sur un intervalle

1.1. Définition

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Exemples

- Toute fonction monôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- La fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

1.2. Opération sur les fonctions continues sur un intervalle

Propriétés 1

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.
- Si f et g sont continues sur I, alors $f+g$, fg, kf $(k \in \mathbb{R})$ et $\left|f\right|$ sont continues sur I.
- Si f et g sont continues sur I et pour tout $x \in \mathrm{I}$, $g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.
- Si f est continue et positive sur I, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.

Exemples

1. Étudier la continuité de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+1} + x - 1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la continuité de la fonction $g : x \longmapsto (x^2+2x-3)\sqrt{x-1}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $h : x \longmapsto \tan x$ puis étudier sa continuité.

Propriété 2

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur I telle que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$ et g une fonction continue sur J. Alors $g \circ f$ est continue sur I.

Exemple

Étudier la continuité de la fonction $x \longmapsto \sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}$ sur son ensemble de définition.

Exercice

1. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) & = x^2 - 1 + \sqrt{-x+9} \text{ si } x < 0 \\ f(x) & = x^4 - 1 + \frac{3}{x+3} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}.$$

   Justifier que f est continue sur son ensemble de définition.
2. Étudier la continuité de la fonction $g : x \longmapsto \frac{1-\cos 2x}{x^2}$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer le prolongement par continuité de g en 0.

2. Image d'un intervalle par une fonction continue

2.1. Propriété

Propriété 1

• Si f est continue sur un intervalle I, alors $f(\mathrm{I})$ est un intervalle.
• Si f est continue sur un intervalle fermé I, alors $f(\mathrm{I})$ est un intervalle fermé.

2.2. Fonction continue et monotone

Propriété 1

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Si f est continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors le sens de variation de f sur $[a, b]$ est celui de f sur $]a, b[$.

Remarque

On obtient un résultat analogue lorsque f est continue sur des intervalles de la forme $]-\infty, b]$, $[a, +\infty[$, $[a, b[$ et $]a, b]$.

Propriétés 2

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une fonction admettant une limite à droite en a et une limite à gauche en b.
• Si f est continue et strictement croissante sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.
• Si f est continue et strictement décroissante sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.
• Si f est continue et strictement croissante sur $]a, b[$, alors

$$f(]a, b[) = \left] \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x), \lim_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) \right[.$$

• Si f est continue et strictement décroissante sur $]a, b[$, alors

$$f(]a, b[) = \left] \lim_{\substack{x \to b \\ <}} f(x), \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) \right[.$$

• Si f est continue et strictement croissante sur $]-\infty, b[$, alors

$$f(]-\infty, b[) = \left] \lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) \right[.$$

• Si f est continue et strictement décroissante sur $]a, +\infty[$, alors

$$f(]a, +\infty[) = \left] \lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) \right[.$$

Exemple

Soit f une fonction et I un intervalle. Compléter le tableau suivant par vrai ou faux.

$f(x)$	I	$f(\mathrm{I})$	Vrai ou faux
$-x^2+1$	$[-1,0]$	$[0,1]$	
$\sin(x)$	$[0,\pi]$	$\{0\}$	
$\frac{x}{1-x}$	$]0,1[$	$]-\infty,0[$	
$\sqrt{\frac{x-1}{4x}}$	$[1,+\infty[$	$\left[\frac{1}{2},1\right]$	
x^4-2x+1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$2\cos^2(x)$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$[0,2]$	

Propriété 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a et b avec $a<b$.

- Si f continue sur I telles que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes contraires, alors l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution appartenant à $]a,b[$ dans I.
- Si f continue et strictement monotone sur I telles que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes contraires, alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]a,b[$ dans I.

Exemple

Étudier le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto x^3+2x+1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que l'équation $x^3+2x+1=0$ admet une unique solution α compris entre -1 et 0.

Propriété 4

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.

- f réalise une bijection de I vers $f(\mathrm{I})$.
- La bijection réciproque , notée f^{-1}, est continue l'intervalle $f(\mathrm{I})$.
- f^{-1} est strictement monotone et a le même sens de variation que f.

Exemple

Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2-1$ est une application bijective de $]-\infty,0[$ vers $]-1,+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f^{-1}.

Remarque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f réalise une bijection de I vers $f(\mathrm{I})$. De ce fait, pour tout $y \in f(\mathrm{I})$, l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution dans l'intervalle I.

Exercice 1

On considère la fonction suivante :

$$g : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \tan x.$$

1. Montrer que g est une application bijective.

2. La bijection réciproque de g est appelé arc tangente et donnée arctan.
   Dresser le tableau de variation de arctan et en déduire les limites : $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x)$.

3. Théorème des valeurs intermédiaires

3.1. Théorème et propriétés

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I. Tout nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a au moins un antécédent par f compris entre a et b.

Exemple

Peut-on trouver un nombre réel x dans l'intervalle $[-\pi, 0]$ tel que $\cos x = x^2$?

Remarque

Ce théorème permet de montrer l'existence d'une solution de l'équation $f(x) = \alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) sur un intervalle donné $[a, b]$.

Propriétés 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

- S'il existe deux éléments a et b $(a < b)$ tels que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a, b[$.
- Si de plus f est strictement monotone, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a, b[$.

Exemple

Justifier que l'équation $x^3+x+2 = \cos x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-\pi, 0]$.

Propriété 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Si f ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors f garde un signe constant.

Exemples

1. a. Étudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$.
   c. Donner le signe de f suivant les valeurs du nombre réel x.
2. Étudier le signe de la fonction $g : x \mapsto x - \sqrt{-x^2+3x-1}$ sur son ensemble de définition.

3.2. Résolution approchée d'une équation

Soit k, a, et b des nombres réels tels que $a < b$. Soit $f(x) = k$ une équation admettant une unique α solution dans l'intervalle $[a, b]$.
Pour résoudre cette équation, on peut procéder comme suit :

- étudier les variations de f ;

- en déduire et justifier l'existence des solutions ;
- localiser chacune de ces solutions ;
- utiliser un algorithme pour déterminer une valeur approchée de chacune des solutions : le balayage d'un intervalle contenant la solution avec un pas correspondant à la précision désirée ou la dichotomie.

Méthode de dichotome.

Elle consiste à diviser l'intervalle $[a,b]$ en deux sous-intervalles $[a,c]$ et $[c,b]$, où $c=\frac{a+b}{2}$ est le centre de l'intervalle $[a,b]$; ensuite prendre celui qui contient[1] α et le diviser en deux sous-intervalles ; on réitère la division jusqu'à l'obtention d'une valeur approchée de α.
Compléter le tableau suivant peut-être utile pour trouver une valeur approchée de α à ϵ près par la méthode de dichotomie.

a	b	$\frac{a+b}{2}$	$f(\frac{a+b}{2})$	Encadrement de α
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Pour le couple (a,b), on calcule $f(\frac{a+b}{2})$ et si $f(a)\cdot f(\frac{a+b}{2})>0$, on remplace a par $\frac{a+b}{2}$ sinon, on remplace b par $\frac{a+b}{2}$. Avec les nouvelles valeurs du couple (a,b), on répète la même procédure jusqu'à ce que $b-a<\epsilon$.

Exemple

Déterminer un encadrement à 10^{-3} près, de la solution α de l'équation $x^3+2x+1=0$ dans $[-1,0]$.

Résolution

a	b	$\frac{a+b}{2}$	$f(\frac{a+b}{2})$	Encadrement de α
-1	0	$-0,5$	$-0,125$	$-1<\alpha<0$
$-0,5$	0	$-0,25$	$0,484375$	$-0,5<\alpha<0$
$-0,5$	$-0,25$	$-0,375$	$0,197266$	$-0,5<\alpha<-0,25$
$-0,5$	$-0,375$	$-0,4375$	$0,04126$	$-0,5<\alpha<-0,375$
$-0,5$	$-0,4375$	$-0,46875$	$-0,040497$	$-0,5<\alpha<-0,4375$
$-0,46875$	$-0,4375$	$-0,453125$	$0,000713$	$-0,46875<\alpha<-0,4375$
$-0,46875$	$-0,453125$	$-0,460938$	$-0,019807$	$-0,46875<\alpha<-0,453125$
$-0,460938$	$-0,453125$	$-0,457031$	$-0,009526$	$-0,460938<\alpha<-0,453125$
$-0,457031$	$-0,453125$	$-0,455078$	$-0,004401$	$-0,457031<\alpha<-0,453125$
$-0,455078$	$-0,453125$	$-0,454102$	$-0,001843$	$-0,455078<\alpha<-0,453125$

Donc $-0,455<\alpha<-0,453$ car $-0,453125-(-0,455078)=0,001953$.

Méthode de balayage.

Elle consiste en la démarche suivante. On veut obtenir un encadrement à 10^{-p} près de la solution α d'une équation $f(x)=0$, comprise entre deux entiers a et b. On effectue les opérations suivantes :

1. Dire α est contenu dans l'intervalle $[a,b]$ signifie que $f(a)\cdot f(b)<0$

- on commence par balayer l'intervalle $[a,b]$ avec un pas de 1. C'est-à-dire qu'on calcule $f(a), f(a+1), f(a+2),\ldots$ On s'arrête dès qu'on a trouvé deux entiers consécutifs n et $n+1$ pour lesquels $f(n)$ et $f(n+1)$ sont de signes opposés. On sait alors que $\alpha \in [n, n+1]$.
- on balaie ensuite l'intervalle $[n, n+1]$ avec un pas de $0,1$. On calcule donc $f(n), f(n+0,1), f(n+0,2),\ldots$ et on s'arrête dès qu'on a trouvé un entier naturel q de sorte que $f(n+0,q)$ et $f(n+0,q+0,1)$ sont de signes opposés.
- on continue en balayant l'intervalle $[n+0,q; n+0,q+0,1]$ avec un pas de $0,01$ et ainsi de suite...

Exemple

Déterminer une valeur approché à 10^{-3} près de la solution de l'équation $x^3-6x-6=0$.

Résolution

- Étudions les variations de la fonction $f: x \mapsto x^3-6x-6$.
  f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction dérivé de f est $f': x \mapsto 3x-^{2}-6$.
  $\forall x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[, f'(x) > 0$;
  $\forall x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[, f'(x) < 0$;
  $\forall x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, f'(x) = 0$.
  Alors f est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty, -\sqrt{2}[$ et $]\sqrt{2}, +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
  Calcul de limites
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
  Tableau de variations

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-8\sqrt{2}-6$	$\searrow$	$-4\sqrt{2}-6$	$\nearrow$	$+\infty$

- Étudions et justifions l'existence de solutions.
  f est continue et strictement croissante sur $]-\infty, -\sqrt{2}]$. Ainsi f réalise une bijection de $]-\infty, -\sqrt{2}]$ vers $f(]-\infty, -\sqrt{2}])$. On a : $f(]-\infty, -\sqrt{2}]) =]-\infty, -8\sqrt{2}-6]$ et $0 \notin]-\infty, -8\sqrt{2}-6]$. Donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $]-\infty, -\sqrt{2}]$.
  f est continue et strictement décroissante sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Ainsi f est réalise une bijection de $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ vers $f([-\sqrt{2}, \sqrt{2}])$. On a : $f([-\sqrt{2}, \sqrt{2}]) = [, -8\sqrt{2}-6]$ et $0 \notin [-4\sqrt{2}-6, -8\sqrt{2}-6]$. Donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
  f est continue et strictement croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$. Ainsi f réalise une bijection de $[\sqrt{2}, +\infty[$ vers $f([\sqrt{2}, +\infty[)$. On a : $f([\sqrt{2}, +\infty[) = [-4\sqrt{2}-6, +\infty[$ et $0 \in [-4\sqrt{2}, +\infty[$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[\sqrt{2}, +\infty[$.
- Localisons la solution.
  f est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur l'intervalle $[2,3]$. On a : $f(2) = -10$ et $f(3) = 3$ donc $f(2)$ et $f(3)$ sont de signes contraires. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on déduit que : $\alpha \in [2,3]$.

• Déterminons une valeur approchée de α à 10^{-3}.
– Balayage de l'intervalle $[2,3]$

x	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
$f(x)$	-9,339	-8,552	-7,633	-6,576	-5,375	-4,024	-2,517	-0,848	0,989

– Balayage de l'intervalle $[2,8;2,9]$

x	2,81	2,82	2,83	2,84	2,85
$f(x)$	-0,671959	-0,494232	-0,314813	-0,133696	0,049125

– Balayage de l'intervalle $[2,84;2,85]$

x	2,841	2,842	2,843	2,844	2,845	2,846	2,847	2,848
$f(x)$	-0,115	-0,097	-0,079	-0,061	-0,042	-0,024	-0,006	0,012

Donc on a : $2,847 < \alpha < 2,848$. Prenons $\alpha = 2,847$.

4. Fonction racine n-ième $(n \geq 2)$ et fonction puissance d'exposant rationnelle

4.1. Fonction racine n-ième $(n \geq 2)$

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.
On appelle fonction racine $n^{\text{ième}}$, la bijection réciproque de la fonction de

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto x^n. \end{aligned}$$

L'image de tout nombre réel positif x par la fonction racine n-ième est notée $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$.

4.2. Fonction puissance d'exposant rationnelle

Définition

Soit $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.
On appelle x à la puissance $\frac{p}{q}$, noté $x^{\frac{p}{q}}$, défini par

$$x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = \sqrt[q]{x}^p.$$

Propriété 1

Soit x et y deux nombres strictement positifs, r et r' deux nombres rationnels. On a :
- $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$;
- $(x \times y)^r = x^r \times y^{r'}$;
- $(x^r)^{r'} = x^{rr'}$;
- $\frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r$.

Exercice

1. Soit $g : x \mapsto -\frac{1}{3}x^3 + 2x + 1$ une fonction.
   a. Étudier les variations de g.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $g(x) = 0$.
   c. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Étudier le sens de variations de la fonction $x \mapsto -x^4 + 12x^2 + 12x - 1$.
   On exprimera la dérivée de f en fonction de g.

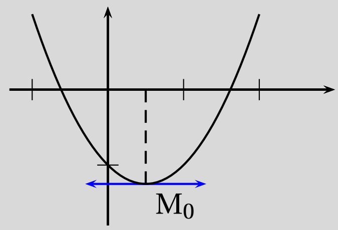
Séquence 5 Dérivabilité - Étude de fonctions

1. Dérivabilité en un point

Définition

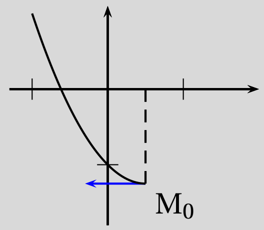
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant un réel a. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère donné.

•On dit que f est dérivable en a lorsque la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet en a une limite finie l. Cette limite est appelée le **nombre dérivée de f** en a et est notée $f'(a)$.
Dans ce cas la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente au point $M_0(a, f(a))$ d'équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.



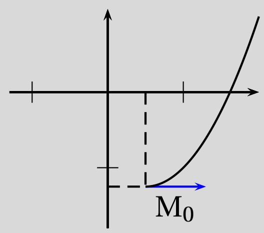
•On dit que f est dérivable à gauche en a lorsque la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a par valeur inférieur. Cette limite est appelé **nombre dérivé de f à gauche en** a et notée $f'_g(a)$.
Dans ce cas, $\mathscr{C}$ admet au point $M_0(a, f(a))$ une demi-tangente définie par :

$$\begin{cases} y & = f'_g(a)(x-a) + f(a) \\ x & \leq a \end{cases}.$$



•On dit que f est dérivable à droite en a lorsque la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a par valeur supérieur. Cette limite est appelé **nombre dérivé de f à gauche en** a et notée $f'_d(a)$.
Dans ce cas, $\mathscr{C}$ admet au point $M_0(a, f(a))$ une demi-tangente définie par :

$$\begin{cases} y & = f'_d(a)(x-a) + f(a) \\ x & \geq a \end{cases}.$$



Exemple

Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f en 1 et en déduire une interprétation graphique du résultat obtenu.
1. $f(x) = 3x^3 + 2x - 3$;
2. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Propriété 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant x_0. f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Exemple

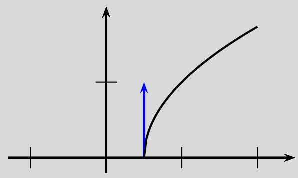
Etudier la dérivabilité en 0 de la fonction f dans chacun des cas suivants.

1. $f(x) = |x|$;
2. $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

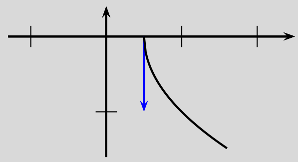
Définition : Demi-tangente

Soit f une fonction de représentation graphique $(\mathscr{C})$ dans un repère et x_0 un élément de D_f.

• Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$, alors $(\mathscr{C})$ admet au point $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ une demi-tangente verticale définie par : $\begin{cases} x = x_0 \\ y \geq f(x_0) \end{cases}$



• Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$, alors $(\mathscr{C})$ admet au point $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ une demi-tangente verticale définie par : $\begin{cases} x = x_0 \\ y \leq f(x_0) \end{cases}$

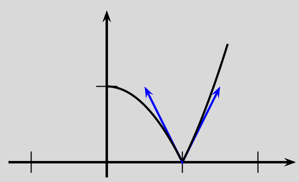


Exemple

Étudier la dérivabilité de la fonction $x \mapsto \sqrt{2x-4}$ en 2. Donner une interprétation graphique du résultat.

Définition

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative, dans un repère donné, d'une fonction f définie en x_0.
Le point $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ est un **point anguleux** lorsque $(\mathscr{C})$ admet en M_0 deux tangentes de directions distinctes.
C'est le cas lorsque f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$.



Exemple

Justifier que le point $M(1,0)$ est un point anguleux de la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \left|x^2 - 1\right|$.

2. Dérivabilité sur un intervalle

Définition

Une fonction f de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ est dérivable sur $[a,b]$ si elle est dérivable en tout point de l'intervalle $]a,b[$, dérivable à droite en a et à gauche en b.

On obtient de façon analogue une fonction dérivable sur un intervalle semi-ouvert.

Remarque

Lorsqu'une fonction est dérivable en tout élément d'un ensemble E, on dit qu'elle est dérivable sur E.

Exemple

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Tout fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.
- La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
- Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur tout intervalle de la forme $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété 1

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

3. Fonction dérivée et dérivées successives

3.1. Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction de I vers $\mathbb{R}$ qui à tout $x \in \mathrm{I}$ associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x est appelée la fonction dérivée de f et se note f'.

Exemple

Dérivées des fonctions élémentaires (Page 215 CIAM Tle SM)

Propriété 1 : Opérations sur les fonctions dérivées

f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I et α est un nombre réel.

- Si f et g sont dérivables sur I, alors αf, $f+g$, $f \times g$ sont dérivables sur dérivables sur I et $\forall x \in \mathrm{I}$, on a :
  - $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$;
  - $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
  - $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$.
- Si f est dérivables sur I, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f^n est dérivable sur I et pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a : $(f^n)'(x) = nf'(x)(f(x))^{(n-1)}$.
- Si f et g sont dérivables sur I et si $\forall x \in \mathrm{I}, g(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I et pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a :
  - $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$;
  - $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$.
- Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur un ensemble contenant $f(\mathrm{I})$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $\forall x \in \mathrm{I}$, $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$.

Exemple

Déterminer, dans chacun des cas suivants, l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de la fonction f.

1. $f(x) = x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 5x^2 + 1$;
2. $f(x) = 2\sin(x+2) - 3\cos(2x+1)$;
3. $f(x) = \frac{2x^3-x+3}{2x^2-4x+1}$;
4. $f(x) = (2x^3+4x+3)\sqrt{2x^2+1}$;
5. $f(x) = \left|x^2-1\right|$.

Résolution

Déterminons, dans chacun des cas suivants, l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de la fonction f.

1. f est une fonction polynôme donc l'ensemble de dérivabilité de f est $\mathbb{R}$. La dérivée de f est la fonction $f' : x \mapsto 5x^4 - 2x^2 + 10x$.
2. $f(x) = 2\sin(x+2) - 3\cos(2x+1)$

   La fonction $x \mapsto x+2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x+2\mathbb{R}$. Donc la fonction $x \mapsto \sin(x+2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto 2\sin(x+2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   La fonction $x \mapsto 2x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $2x+1 \in \mathbb{R}$. Donc la fonction $x \mapsto \cos(2x+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto -3\cos(2x+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Alors la fonction $x \mapsto 2\sin(x+2) - 3\cos(2x+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f l'est aussi.

   $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2\cos(x+2) + 3 \times 2\sin(2x+1)$

   $f'(x) = 2\cos(x+2) + 6\sin(2x+1)$
3. $f(x) = \frac{2x^3-x+3}{2x^2-4x+1}$

   f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right\}$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right\}$.

   $$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right\}, f'(x) = \frac{(6x^2-1)(2x^2-4x+1) - (4x-4)(2x^3-x+3)}{(2x^2-4x+1)^2}$$

   $$f'(x) = \frac{4x^4 - 16x^3 + 8x^2 - 12x + 11}{(2x^2-4x+1)^2}$$
4. $f(x) = (2x^3+4x+3)\sqrt{2x^2+1}$

   f est définie sur $\mathbb{R}$.

   La fonction $x \mapsto 2x^3+4x+3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

   La fonction $x \mapsto 2x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $2x^2+1 \in]0, +\infty[$. Donc la fonction $x \mapsto \sqrt{2x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Alors la fonction $x \mapsto (2x^3+4x+3)\sqrt{2x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   $$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) &= (6x^2+4)\sqrt{2x^2+1} + (2x^3+4x+3) \times \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}} \\ &= (6x^2+4)\sqrt{2x^2+1} + \frac{2x(2x^3+4x+3)}{\sqrt{2x^2+1}} \\ &= \frac{(6x^2+4)(2x^2+1) + 2x(2x^3+4x+3)}{\sqrt{2x^2+1}}\end{aligned}$$

   $$f'(x) = \frac{14x^4 + 22x^2 + 4}{\sqrt{2x^2+1}}$$
5. $f(x) = \left|x^2-1\right|$

   f est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto x^2-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur les intervalles $]-\infty,-1,$ $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$; et la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur les intervalles $]-\infty,0[$ et $],+\infty[$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}-\{-1,1\}, x^2-1 \in \mathbb{R}^*$. Donc la fonction $x \mapsto \left|x^2-1\right|$ est dérivable sur les intervalles $]-\infty,-1,$ $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$.

Écrivons $f(x)$ sans le symbole de valeurs absolue suivant les valeurs de x. Étudions le signe de x^2-1.

$\forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[, x^2-1>0$

$\forall x \in]-1,1[, x^2-1<0$

$\forall x \in \{-1,1\}, x^2-1=0$

Donc on a :

$$\begin{cases} f(x) & = x^2-1 \text{ si } x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\\ f(x) & = -x^2+1 \text{ si } x \in [-1,1] \end{cases}$$

Étudions la dérivabilité de f en -1 et 1.

• -1

$$\begin{aligned} \forall x<-1, \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} &= \frac{x^2-1}{x+1} \\ &= \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} \\ &= x-1 \end{aligned}$$

$\lim\limits_{x \to -1}(x-1) = -1-1 = -2$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x<-1}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -2$. Ainsi f est dérivable à gauche en -1 et $f'_g(-1) = -2$.

$$\begin{aligned} \forall x>-1, \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} &= \frac{-x^2+1}{x+1} \\ &= \frac{(-x+1)(x+1)}{x+1} \\ &= -x+1 \end{aligned}$$

$\lim\limits_{x \to -1}(-x+1) = 2$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x>-1}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = 2$. Ainsi f est dérivable à droite en -1 et $f'_d(-1) =$ 2.

On a : $f'_g(-1) \neq f'_d(-1)$. Donc f n'est pas dérivable sur f.

• 1 f n'est pas dérivable en 1.

En somme, f est dérivable sur les intervalles $]-\infty,-1,$ $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$. $\begin{cases} f(x) & = 2x \text{ si } x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty \\ f(x) & = -2x \text{ si } x \in]-1,1[\end{cases}$

Exercice 1

Exercices 1a, 1b

Page 221

CIAM Tle SM

3.2. Dérivées successives

Définition

Soit f une fonction dérivable sur I et f' sa fonction dérivée.

- Si f' est dérivable sur I, on dit que f est 2 fois dérivable et la dérivée de f' est appelée dérivée seconde de f et notée f''. Donc $f'' = (f')'$.
- Si f'' est dérivable sur I, alors f est 3 fois dérivable et la dérivée de f'' notée $f^{(3)}$ est la dérivée troisième de f. Donc $f^{(3)} = (f'')'$.
- Plus généralement, si la dérivée $(n-1)$-ième $f^{(n-1)}$ de f est dérivable sur I, alors f est n fois dérivable sur I et on a : $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Notation

f' est encore notée $\frac{df}{dx}$.
f'' est encore notée $\frac{d^2f}{dx^2}$.
$f^{(n)}$ est encore notée $\frac{d^nf}{dx^n}$.

Exercice 2

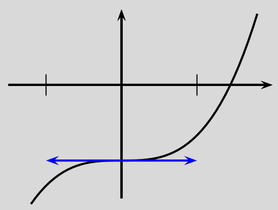
Exercices 1g, 1h,1i
Page 221
CIAM Tle SM

4. Applications des dérivées successives

Définition : Point d'inflexion d'une courbe

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère donné.

- On appelle **point d'inflexion** de $(\mathscr{C})$ tout point $M_0(x_0, f(x_0))$, où la courbe traverse la tangente.
- Lorsque $f'(x)$ s'annule en x_0 sans changer de signe ou lorsque $f''(x)$ s'annule en changeant de signe, le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de $(\mathscr{C})$.



Exemple

Justifier que le point $M(0,-1)$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 1$

Résolution

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de fonction dérivée la fonction $f' : x \mapsto x^2$.
$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) > 0$
$f'(0) = 0$
Donc le point $M(0,-1)$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f.

Propriété 1 : Développement limité d'ordre n au voisinage de 0

Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I contenant 0. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x)$, où $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Exemple
Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$ après avoir déterminé le développement limité d'ordre 3 de la $f : x \mapsto \cos x$ au voisinage de 0.

5. Dérivabilité de la réciproque d'une fonction bijective

Propriété 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et ϕ la fonction de I vers $f(\mathrm{I})$ définie par : $\phi(x) = f(x)$, pour tout $x \in \mathrm{I}$.
- Si f est continue et est strictement monotone, alors ϕ est une bijection et ϕ^{-1} est continue sur $f(\mathrm{I})$.
- Si de plus, $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathrm{I}$, alors ϕ^{-1} est dérivable sur $f(\mathrm{I})$.

$$\forall x \in f(\mathrm{I}), (\phi^{-1})'(x) = \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(x))}.$$

L'ensemble de dérivabilité de ϕ^{-1} est :

$$\mathrm{E} = \left\{\phi(x) \in f(\mathrm{I}) | f'(x) \neq 0\right\} = f(\mathrm{I}) - \left\{f(x) | f'(x) = 0\right\}.$$

Exemple
1. Soit $f : x \mapsto \cos 2x - 1$ une fonction définie sur $[-\pi, \pi]$. Étudier les variations de f.
2. Justifier que la fonction

$$\begin{aligned} g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\longrightarrow [-1, 0] \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

est bijective. Préciser son ensemble de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

6. Théorème des inégalités des accroissements finis

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle qu'il existe deux nombres réels m et n vérifiant $m \leq f'(x) \leq \mathrm{M}$, pour tout $x \in \mathrm{I}$. Alors pour tous éléments a et b de I tels que $a < b$, on a : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq \mathrm{M}(b-a)$.
(Ces inégalités sont appelées les **inégalités des accroissement finis**)

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle qu'il existe un nombre réel M vérifiant $\left|f'(x)\right| \leq \mathrm{M}$, pour tout $x \in \mathrm{I}$. Alors pour tout éléments a et b de I, on a : $\left|f(b) - f(a)\right| \leq \mathrm{M}|b-a|$.

Exemple
Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$.

7. Périodicité et parité d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie un ensemble D_f.
f est périodique s'il existe un nombre positif T tel que : $\forall x \in D_f, x+T \in D_f,\ f(x+T) = f(x)$
On appelle alors période de f le plus petit nombre réel strictement positif T vérifiant les conditions ci-dessus.

Exemple

- Pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, les fonctions $x \to \sin(ax+b)$ et $x \mapsto \cos(ax+b)$ sont périodiques de période $\frac{2\pi}{|a|}$.
- Pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, les fonctions $x \to \tan(ax+b)$ et $x \mapsto \text{cotan}(ax+b)$ sont périodiques de période $\frac{\pi}{|a|}$.

Propriété 1

Si T_1 et T_2 sont des périodes respectives de deux fonctions f et g, alors $f+g$, $f \times g$ et $\frac{f}{g}$ ont pour période le « plus petit commun multiple » de T_1 et T_2.

Exemple

Déterminer la période de chacune des fonctions suivantes :
1. $f : x \mapsto \cos 2x + 3\sin(3-x)$;
2. $f : x \mapsto -\sin^2(8x+5) + \sin^3(4x)$;
3. $f : x \mapsto \frac{\sin(3x-1)}{4\cos(6x-2)}$.

Propriété 2

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D. Soit a , b et T des réels tels que $T > 0$.

- Si f est paire, alors il suffit de l'étudier sur l'ensemble $D_f \cap \mathbb{R}_+$. On peut alors compléter la courbe de f par la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est impaire, alors il suffit de l'étudier sur l'ensemble $D_f \cap \mathbb{R}_+$. On peut alors compléter la courbe de f par la symétrie par rapport à l'origine du repère.
- Si la droite d'équation $x = a$ (respectivement le point $A(a;b)$) est axe(respectivement centre) de symétrie de la courbe représentative de f, alors l'étude de la fonction f pourra simplement se fait sur $D \cap [a;+\infty]$ ou encore $D \cap]-\infty;a]$.
- Si f est périodique de période T, alors on peut étudier f sur $D_f \cap [\alpha;\alpha+T]$, où α est un nombre réel. On peut alors compléter la courbe obtenue sur $D_f \cap [\alpha;\alpha+T]$, où α est un nombre réel par ses images par les translations $kT\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Si f est une fonction périodique dont une période est T et si de plus la droite d'équation $x = a$ (respectivement le point $A(a;b)$) est axe (respectivement centre) de symétrie de la courbe représentative de f alors il est judicieux d'étudier f sur , $D \cap [a;a+\frac{T}{2}]$; du fait de la périodicité et de la parité de f. En particulier si f est périodique dont une période est T et en plus paire ou impaire , son étude se ferra sur $D \cap [0;\frac{T}{2}]$.

Exemple

Étudier la parité et la périodicité de la fonction $f : x \mapsto \frac{2\sin 2x}{1+\cos x}$. En déduire un intervalle sur lequel son étude peut-être restreint et comment tracer la courbe représentative de f sur son ensemble de définition.

8. Sens de variation

Propriété 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- f est strictement croissante sur I si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a : $f'(x) > 0$.
- f est strictement décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a : $f'(x) < 0$.
- f est constante sur I si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a : $f'(x) = 0$.

Exercice 1

Exercices 31, 35, 45, 49, 50
Pages 230, 231
CIAM Tle SM

9. Extremums relatifs

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $]a, b[$ et x_0 un élément de $]a, b[$.
- Si f' s'annule et change de signe en x_0, alors f admet un extremum relatif.
- De plus, f est strictement croissante (resp. décroissante) sur $]a, b[$ et strictement décroissante (resp. croissante) sur $]a, b[$, alors f admet un maximum (resp. minimum) égale à $f(x_0)$.

Exemple
Étudier le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto x^3 - x^2 - x + 1$ et en déduire les extremums relatifs de f.

Séquence 6 Primitives

1. Définition et propriétés

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle **primitive** sur I de f toute fonction F dérivable sur I telle que pour tout $x \in \mathrm{I}$, on ait : $\mathrm{F}'(x) = f(x)$.

Exemple

1. Démontrer que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto x\sqrt{x} + 2$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{x}$ sur $]0, +\infty[$.
2. Démontrer que la fonction $\mathrm{G} : x \mapsto -\cos^2 x$ est une primitive de la fonction $g : x \mapsto \sin(2x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que la fonction $\mathrm{H} : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - x^2 - x + 2$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto x^3 - 2x - 1$.

Propriétés 1

1. Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.
2. Soit F une primitive d'une fonction f sur un intervalle I.
   - Pour tout nombre réel k, la fonction $x \mapsto \mathrm{F}(x) + k$ est aussi une primitive de f sur I.
   - Toute primitive de f sur I est de la forme $x \mapsto \mathrm{F}(x) + k$, où k est constante réelle.
3. Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
   Alors il existe une unique primitive F de la fonction f sur I telle que : $\mathrm{F}(x_0) = y_0$.

Exemples

On considère la fonction $f : x \mapsto 3x^2$.
1. Justifier que f admet de primitives sur $\mathbb{R}$ et déterminer ses primitives sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $\mathrm{G} : x \mapsto x^3 + \sqrt{2} - 1$ est-elle une primitive de f sur $\mathbb{R}$?
3. Donner deux autres primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer la primitive F de f qui s'annule 2.

2. Calcul de primitives

Propriété 1

Soit F et G des primitives respectives de f et g sur un intervalle I.
Alors pour tous réels a et b, la fonction $a\mathrm{F} + b\mathrm{G}$ est une primitive de la fonction $af + bg$ sur I.

Exemple

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 7x^4 + 3x$ et $g(x) = \cos^2 x$.
1. Donner une primitive de chacune des fonctions f et g.
2. Donner une primitive de chacune des fonctions $3f$, $f - g$, $7f + 4g$ et $\sqrt{2}(f + g)$.

Propriétés 2 : Primitives usuelles

Soit f une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I.

f	F	I
$x \longmapsto a\ (a \in \mathbb{R})$	$x \longmapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \longmapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x^n}\ (n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$	$x \longmapsto \frac{1}{(1-n)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto \sin x$	$x \longmapsto -\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos x$	$x \longmapsto \sin x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto 1 + \tan^2 x$	$x \longmapsto \tan x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exemples

Déterminer les primitives de f dans chacun des cas suivants.

1. $f(x) = 12\sqrt{3}$;
2. $f(x) = \frac{4}{x^3}$;
3. $f(x) = 2\sin x - \cos x$;
4. $f(x) = 3(1 + \tan^2 x)$.

Propriétés 3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel non nul.

1. La fonction $\frac{1}{n+1}f^{n+1}$ est une primitive sur I de la fonction $f' \times f^n$.
2. Si pour tout $x \in$ I, on a : $f(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{(1-n)f^{n-1}}$ est une primitive sur I de la fonction $\frac{f'}{f^n}$ $(n > 1)$.
3. Si pour tout $x \in$ I, on a : $f(x) > 0$, alors la fonction $\sqrt{f}$ est une primitive sur I de la fonction $\frac{f'}{2\sqrt{f}}$.

Exemples

Déterminer les primitives de f dans chacun des cas suivants.

1. $f(x) = 5x^4 + 6x - 1$;
2. $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$;
3. $f(x) = \frac{-4}{\sqrt{-4x+2}}$;
4. $f(x) = 5x\left(\frac{5}{2}x^2 - 7\right)^2$;
5. $f(x) = \frac{3x^2-2x}{(x^3-x^2)^2}$;
6. $f(x) = \cos x - 2\sin x$.

Propriété 4

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, $x \longmapsto ax+b$ une fonction affine et J l'image réciproque de I par cette fonction affine.
La fonction $x \longmapsto \frac{1}{a}f(ax+b)$ est une primitive sur J de la fonction $x \longmapsto f'(ax+b)$.

Exemple

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions $f : x \longmapsto \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ et $g : x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{2}x + 2\right)$.

Propriété 5

Soit f une fonction continue et dérivable sur un intervalle I et g une fonction continue et dérivable sur un intervalle J telle pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a : $f(x) \in \mathrm{J}$.
La fonction $f' \times (g' \circ f)$ est une primitive de $g \circ f$ sur l'intervalle I.

Séquence 7 Intégration

1. Intégrale d'une fonction continue

1.1. Définition et propriété

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ dont une primitive est F.

On appelle **intégrale de a à b de f** le nombre, noté $\int_a^b f(x)dx$, égale à $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.

Ce nombre ne dépend pas du choix de la primitive.
On note $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = [\mathrm{F}(x)]_a^b$.

Vocabulaire.

- $\int_a^b f(x)dx$ se lit «somme de a à b de $f(x)dx$».
- $[\mathrm{F}(x)]_a^b$ se lit «pris entre a et b».
- a et b sont les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.
- Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, on peut remplacer x par toute autre lettre sauf a et b : on dit que x est une variable muette.

Exemples

Calculer les intégrales suivantes.

$\mathrm{I}_0 = \int_1^2 \frac{2}{x}dx$; $\qquad \mathrm{I}_3 = \int_{-3}^2 \frac{2x^3 + x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}dx$;

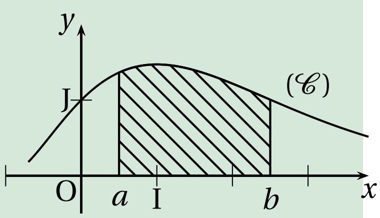
$\mathrm{I}_1 = \int_0^1 5x(5x^2 - 4)dx$; $\qquad \mathrm{I}_4 = \int_0^{\pi} 3\sin(3x - 2)dx$;

$\mathrm{I}_2 = \int_{-1}^1 \frac{2x - 3}{(2x^2 - 6x + 11)^3}dx$; $\qquad \mathrm{I}_5 = \int_{-\pi}^0 2\cos^2 x \sin^5 x dx$.

Propriété : Interprétation graphique

Soit f une fonction positive continue sur un intervalle $[a, b]$ et $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

Le nombre $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire, exprimé en unité d'aire ua, du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ avec $ua = \mathrm{OI} \times \mathrm{OJ}$.



Exemples

Le plan est muni d'un repère orthonormé et l'unité graphique est le centimètre.

- Déterminer l'aire du domaine délimité par la courbe de la fonction $f : x \mapsto \frac{3x}{(x^2+1)^2}$, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$.

•Déterminer l'aire du domaine délimité par la courbe de la fonction $g : x \mapsto \cos(x)$, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$.

1.2. Propriétés algébriques

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soit a, b, c trois éléments de I tels que $a \leq c \leq b$ et λ un nombre réel.

• $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ et $\int_a^b f(x)dx = 0$;

• $\int_a^b (\lambda f + g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

• $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Exemples

•Calculer $\int_0^{-1} (x^2 + 2x - 1)dx$

•Calculer $\int_{-3}^{4} |x-1|\,dx$.

•Calculer $\int_{-2\pi}^{3\pi} (2\cos(x-1) - \mathrm{e}^x)dx$

1.3. Comparaison d'intégrale

Signe de l'intégrale

Propriétés

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux éléments de I tels que $a \leq b$.

•Si f est positive sur I, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

•Si $f \leq g$ sur I, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Exemples

•Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait : $f'(x) = \frac{2}{x}\mathrm{e}^{-x}$.
Montrer que $f(1) \leq f(4)$.

•Soit x un nombre réel positif.
Montrer que $\sin x \leq x$.

Inégalités de la moyenne et valeur moyenne

Propriétés 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ avec $a \le b$.
• S'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathrm{I}, |f(x)| \le \mathrm{M}$, alors

$$\forall a \in \mathrm{I}, \forall b \in \mathrm{I}, \text{tels que } a \le b, \text{ on a : } \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \mathrm{M}|b-a|.$$

• Si $\forall x \in [a,b], m \le f(x) \le \mathrm{M}$, alors $m \le \frac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx \le \mathrm{M}$.

Ces inégalités sont appelées des **inégalités de la moyenne**.

Exemples

• Soit f une fonction continue tels que pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, on a : $|f(x)| \le \frac{5}{4e}$.
Donner un encadrement de $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

• Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{e^x}{x+2}$.
Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a : $\frac{1}{2} \le g(x) \le \frac{5}{6}$.

Propriété 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ avec $a \le b$.
Il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Le nombre $\frac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est la **valeur moyenne** de f sur $[a,b]$.

Exemple

Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0,2]$ dans chacun des cas suivants.

• $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$;

• $f(x) = \sqrt{2x+1}$.

2. Calcul d'intégrales

Intégration par parties

Propriété

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que les dérivées u' et v' sont continues sur I, a et b deux éléments de I.
On a : $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$.

Exemples

Calculer les intégrales suivants.

$$\mathrm{I}_0 = \int_{-2}^{0} x(x+1)^3 dx; \qquad \mathrm{I}_2 = \int_0^4 (2x-1)e^{2x} dx; \qquad \mathrm{I}_4 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2 t \sin^3 dt;$$

$$\mathrm{I}_1 = \int_{-1}^{\pi} e^x \cos x dx; \qquad \mathrm{I}_3 = \int_2^{-1} t(2x^2-1)^2 dx; \qquad \mathrm{I}_5 = \int_{-3}^{2} \frac{x(2x^3+x)}{\sqrt{x^4+x^2+1}} dx.$$

Changement de variable affine

Soit f une fonction continue sur un intervalle contenant deux réels a et b, α et β deux nombres réels avec $\alpha \neq 0$.

Pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(\alpha t+\beta)dt$, on peut utiliser le procédé suivant :

- faire le changement de variable : $u = \alpha t+\beta$; on obtient $du = \alpha dt$;
- utiliser l'égalité : $\displaystyle\int_a^b f(\alpha t+\beta)dt = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} \frac{1}{\alpha} f(u)du$.

Exemple

Calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{t^2}{\sqrt{2t+3}}dt$.

Intégrale de fonctions paires, impaires, périodiques

Propriétés

Soit a un nombre réel.

- Si f est une fonction paire continue sur un intervalle contenant les nombres 0 et a, alors
$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx \text{ et } \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$
- Si f est une fonction impaire continue sur un intervalle contenant les nombres 0 et a, alors
$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx \text{ et } \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$
- Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T, alors on a :
$$\int_a^{a+\mathrm{T}} f(x)dx = \int_0^{\mathrm{T}} f(x)dx.$$

Exemples

Calculer les intégrales suivantes.

$\mathrm{J}_0 = \displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{3x}{(x^2+1)^2}dx$; $\mathrm{J}_2 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x$; $\mathrm{J}_4 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}dx$;

$\mathrm{J}_1 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cos x dx$; $\mathrm{J}_3 = \displaystyle\int_{\pi}^{3\pi} \sin x\sin 2x dx$; $\mathrm{J}_5 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\sin^3 dt$.

Calcul approchée d'une intégrale

Méthode des rectangles

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.

On suppose que f est croissante sur $[a,b]$.

On subdivise l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles de même amplitude $\frac{b-a}{n}$ et d'extrémités $a = a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n = b$.

Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à $n-1$, $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k)dx$ représente l'aire du rectangle de base $\frac{b-a}{n}$ et de hauteur $f(a_k)$.

Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à $n-1$, on a :

$$\left(\forall x \in [a_k, a_{k+1}], f(a_k) \le f(x) \le f(a_{k+1})\right) \Longrightarrow \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k)dx \le \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx \le \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_{k+1})dx$$
$$\Longrightarrow (a_{k+1}-a_k)f(a_k) \le \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx \le (a_{k+1}-a_k)f(a_{k+1})$$
$$\Longrightarrow \frac{b-a}{n}f(a_k) \le \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx \le \frac{b-a}{n}f(a_{k+1})$$

En faisant la somme membre à membre de cette inégalité pour chaque valeur de k, on obtient : $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f(a_k) \le \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx \le \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f(a_{k+1}) \Longrightarrow \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(a_k) \le \int_{a_0}^{a_n} f(x)dx \le \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(a_{k+1})$

En posant $s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$ et $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+1})$, on obtient : $s_n \le \int_a^b f(x)dx \le S_n$.

Toute valeur comprise entre s_n et S_n est une valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$.

On prend, en général, leur demi-somme comme valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

Méthode des trapèzes

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.
On subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même amplitude $\frac{b-a}{n}$ et d'extrémités $a = a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n = b$.
Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à $n-1$, $\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}dx$ représente l'aire d'une trapèze de bases $f(a_k)$ et $f(a_{k+1})$ et de hauteur $\frac{b-a}{n}$.
La méthode des trapèzes consiste à approcher $\int_a^b f(x)dx$ par la somme des aires de trapèzes pour chaque valeur de k c'est-à-dire $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}dx$.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{2n}\left(f(a_k)+f(a_{k+1})\right) \\
&= \frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(a_k)+f(a_{k+1})\right) \\
&= \frac{b-a}{2n}\left([f(a_0)+f(a_1)]+[f(a_1)+f(a_2)]+\cdots+[f(a_{n-2})+f(a_{n-1})]+[f(a_{n-1})+f(a_n)]\right) \\
S_n &= \frac{b-a}{2n}\left(f(a_0)+2f(a_1)+2f(a_2)+\cdots+2f(a_{n-1})+f(a_n)\right)
\end{aligned}$$

3. Utilisations du calcul intégral

3.1. Calculs d'aires et de volumes

- **Calcul d'aires**

Propriété

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$ leurs représentations graphiques respectives, a et b deux éléments de I ($a < b$).
Lorsque $f \leq g$ sur $[a, b]$, l'aire du domaine D délimité par $(\mathscr{C}_f)$, $(\mathscr{C}_g)$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathscr{A}(\mathrm{D}) = \int_a^b [g(t) - f(t)]\,dt.$$

Exemples

Le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) tel que OI = 2OJ = 4 cm.

1. Déterminer, en cm^2, l'aire du domaine délimité par les courbes : $(\mathscr{C}_1) : y = x^2$ et $(\mathscr{C}_2) : y = \sqrt{x}$.
2. Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes des fonctions $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto x + 4$ et l'axe des ordonnées.

Calcul de volumes

Propriété 1

Le volume du solide de l'espace limité par les plans d'équations $z = a$ et $z = b$ est donné en unité de volume par $\displaystyle\int_a^b \mathrm{S}(t)\,dt$, où $\mathrm{S}(t)$ est l'aire de la section du solide par le plan d'équation $z = t$ avec $a \leq t \leq b$. On admet que la fonction $t \mapsto \mathrm{S}(t)$ est continue sur $[a, b]$.

Propriété 2

Soit f une fonction continue et dérivable de signe contenant sur un intervalle $[a, b]$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). La volume V du solide de engendré par la rotation de $(\mathscr{C})$ autour de l'axe des abscisses est :

$$\mathrm{V} = \left(\pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx\right) u.v \text{ (où } u.v \text{ est l'unité de volume).}$$

Exercice

Exercice 35 - Page 317 (CAIM Tle C)

3.2. Fonctions définies par une intégrale

Propriété 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant un nombre réel a.
La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Séquence 8 Fonction logarithme népérien

1. Généralités

1.1. Définition

Définition

La fonction logarithme népérien est la primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. Elle est noté ln.

Remarque

•La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Elle donc une bijective.
•L'antécédent de 1 par ln est noté e : c'est le nombre d'Euler.

1.2. Propriétés algébriques

Propriété

Soit x et y deux nombres réels strictement positifs et r un nombre rationnel positif.

•$\ln(xy) = \ln x + \ln y$;
•$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$;
•$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$;
•$\ln x^r = r \ln x$.

1.3. Limites remarquables

Propriété

•$\lim\limits_{\substack{x>0 \\ x\to 0}} \ln x = -\infty$;
•$\lim\limits_{\substack{x>0 \\ x\to 0}} \ln x = 0$;
•$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$;
•$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$;
•$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$;
•$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.

1.4. Comparaison

Propriété

Soit x et y deux nombres réels strictement positifs. On a :
•$x = y \iff \ln x \ln y$;
•$x < y \iff \ln x < \ln y$.

2. Fonctions comportant $\ln$

2.1. Fonction $\ln \circ u$

Propriété 1 : Continuité de $\ln \circ u$

Soit u une fonction continue et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $\ln \circ u$ est continue sur I.

Propriété 2 : Dérivabilité de $\ln \circ u$

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur I et on a : $(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$.

Propriété 3 : Primitive de $\frac{u'}{u}$

Soit u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur un intervalle I.
La fonction $\ln \circ |u|$ est une primitive sur I de la fonction $\frac{u'}{u}$.

Séquence 9 Probabilité

1. Vocabulaire des probabilités

Expérience aléatoire, éventualité, univers

Définition

- On appelle **expérience aléatoire** toute expérience dont on ne peut prévoir le résultat avec certitude mais dont on peut connaître tous les résultats possibles.
- On appelle **éventualité** tout résultat possible d'une expérience aléatoire.
- L'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire est appelé **univers des éventualités** et on le note souvent Ω.

Exemple

On considère les situations suivantes :

1. On lance un dé et on note le numéro de la face supérieure.
2. On tire au hasard, d'une urne contenant 3 boules rouges et 2 boules blancs, une boule une boule.

Dans chacun de ces situations, définir une expérience aléatoire, une éventualité et l'univers des éventualités.

Événements

Définition

Soit Ω l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.

- On appelle **événement** de Ω tout sous-ensemble de Ω.
- On appelle **événement élémentaire** tout événement composé d'une seule éventualité.
- A et B étant deux événements,
  - on appelle **événement « A et B»** le sous-ensemble $A \cap B$ de Ω ;
  - on appelle **événement «A ou B»** le sous-ensemble $A \cup B$ de Ω.
- Deux événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.
- Deux événements A et B sont dits **contraires** si $A \cup B = \Omega$ et $A \cap B = \varnothing$.
  Dans ce cas, on dit que A est l'**événement contraire** de B et on note $A = \overline{A}$.
- Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ une suite de n événements.
  On dit que les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment un **système complet d'événements** s'ils sont deux-à-deux incompatibles et leur réunion est égale à Ω.

Exemple

On tire au hasard, d'une urne contenant 3 boules rouges, 2 boules blanches et 3 boules noires, deux boules simultanément.
Soit Ω l'univers de cette expérience aléatoire. Alors une éventualité est un ensemble contenant deux boules choisies dans l'urne.

- Un événement de cette expérience peut-être

A : « tirer deux boules de même couleurs >> ;

B : « tirer une boule rouge et une boule blanches >> ;

C : « tirer soit deux boules rouges soit deux boules noires >> ;

D : « tirer deux boules blanches ».

•Traduire en une phrase l'événement $A \cap B$. Que peut-on conclure sur A et B ?
•Traduire en une phrase l'événement $A \cup B$.
•Traduire en une phrase l'événement $\overline{A \cap B}$.
•Traduire en une phrase l'événement $\overline{D}$.

2. Probabilité d'un événement

Dans tout ce qui suit, on désigne par Ω l'univers associé une expérience aléatoire et on le suppose non vide et fini.

2.1. Définition et propriétés

Définition

On appelle **probabilité** sur Ω, toute application p de l'ensemble des événements de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ qui à tout événement A associe le nombre $p(A)$ et vérifiant :
• $p(\Omega) = 1$;
•si A et B sont deux événements incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

$p(A)$ appelé probabilité de l'événement A

Propriété 1

Soit p une probabilité sur Ω, A et B deux événements.
1. $p(A) + p(\overline{A}) = 1$
2. Si $A \subset B$, on a : $p(A) \leq p(B)$.
3. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
4. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des événements deux-à-deux incompatibles, alors

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_n).$$

Exemple

Une enquête effectuée dans une cantine scolaire donne les résultats suivants : 60% des élèves aiment le riz, 50% aiment le haricot et 20% aiment les deux à la fois.
On considère les événements :
A : «un enfant aime le riz ou le haricot» ;
B : «un enfant n'aime ni le riz ni le haricot» ;
C : «un enfant aime le riz mais pas le haricot».
1. Sans calculer $p(A)$ et $p(C)$, comparer-les.
2. Calculer la probabilité de chacun des événements A, B, C et $B \cup C$.
s

2.2. Équiprobabilité

Définition

Etant donné une probabilité sur Ω, deux événements sont dits **équiprobables** s'ils ont la même probabilité.

Exemple

Un dé numéroté de 1 à 6 est tel que la probabilité d'obtenir un numéro pair est le triple que celle d'obtenir un numéro impair. On lance ce dé et on observe la face supérieure.
Calculer la probabilité de chacun des événements élémentaires de cette expérience aléatoire.

Propriété 1

Si tous les événements élémentaires sont équiprobables, alors pour tout événement A, on a :
$$p(\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{Card}(\mathrm{A})}{\mathrm{Card}(\mathrm{B})}.$$

Remarque

De façon courante, on reconnaît les situations où les événements sont équiprobables grâce aux expressions : «dé parfait», «dé non truqué», «indiscernable au toucher», «tirage au hasard»,...

Exemple

Une urne contient 5 boules blanches, 3 boules noires et 2 boules rouges indiscernable au toucher.
On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne, calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : «obtenir deux boules blanches » ;
B : «obtenir deux boules blanches et une boule rouge ».

2.3. Probabilité conditionnelle

Définition

Soit A et B deux événements tels que $\mathrm{A} \neq \varnothing$.
On appelle probabilité conditionnelle de l'événement « B sachant A » le nombre noté $p(\mathrm{B}|\mathrm{A})$ ou $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ et définie par :
$$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}.$$

Remarque

L'application p_{A} de $\mathscr{P}(\Omega)$ vers $[0,1]$ qui, à tout événement B, associe le réel $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ définie une probabilité sur Ω.

Exemple

On lance trois fois de suite un dé parfait numéroté de 1 à 6 et on note le résultat de chaque lancé.
Suite au premier lancé, une personne obtient un numéro pair. Calculer de deux manières différentes, la probabilité qu'elle obtienne au moins un multiple de 3 au troisième lancé?

Propriété 1

1. Soit A et B étant deux événements non impossibles. On a :

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(B) = p_B(A) \times p(B).$$

2. Soit $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ un système complet d'événements. Pour tout événement B, on a :

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} p_B(A_i) \times p(A_i).$$

Exemple

Dans un pays, il y a 33% de la population contaminée par le coronavirus. Afin de dépister la virus, il est mis en place de la population le test TCR (Réaction en Chaîne par Polymérase) efficace à 95%.

2.4. Événements indépendants

Définition

Deux événements A et B d'une expérience aléatoire sont **indépendants** si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Exemple

Trois élèves A, B et C passent le même jour un examen. Les examens sont différents et se déroulent en des lieux différents.
Les parents des candidats leurs attribuent les probabilités de succès suivants : $p(A) = 0,7$; $p(B) = 0,4$; et $p(C) = 0,6$.
Quelle est la probabilité qu'ils réussissent tous ?

Propriété 1

Soit A et B deux événements de probabilités toutes non nulles.
- A et B sont indépendants ;
- $p_A(B) = p(B)$;
- $p_B(A) = p(A)$.

Propriété 2

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exemple

Trois élèves A, B et C passent le même jour un examen. Les examens sont différents et se déroulent en des lieux différents. Les parents des candidats leurs attribuent les probabilités de succès suivants : $p(A) = 0,7$, $p(B) = 0,4$ et $p(C) = 0,6$.
Quelle est la probabilité qu'un seul élève échoue ?

3. Variables aléatoires réelles

3.1. Définition et notation

Définition

On appelle variable aléatoire réelle X sur Ω, toute application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Notation

Soit une variable aléatoire X réelle et $x \in \mathbb{R}$. On note :
- $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X est appelée **univers image** ;
- $(X = x)$ l'événement « X prend la valeur x » ;
- $(X < x)$ l'événement « X prend une valeur inférieur à x ».

Exemple

On tire simultanément cinq boules d'une urne contenant six boules blanches et quatre boules noires indiscernables au toucher.
- Le nombre de boules blanches obtenues suite un tirage défini une variable aléatoire réelle (notons la X) sur l'univers Ω associé cette expérience aléatoire.
  On a : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Le minimum des nombres de boules blanches et noires obtenues suite à un tirage défini une variable aléatoire (notons la Y) sur l'univers Ω associé cette expérience aléatoire.
  On a : $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

3.2. Loi de probabilité

Définition

Soit $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ l'univers image d'une variable aléatoire réelle X.
On appelle **loi de probabilité** de X l'application qui associe à tout élément x_i de $X(\Omega)$ associe la probabilité de l'événement $(X = x_i)$.

Remarque

La loi de probabilité de X est souvent résumé dans un tableau comme celui-ci.

i	1	2	$\cdots$	n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

p_i désigne la probabilité de l'événement $(X = x_i)$

Exemple

On tire simultanément trois cinq boules d'une urne contenant six boules blanches et quatre boules noires indiscernables au toucher.

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues suite un tirage.
   Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Soit Y la variable aléatoire égale au minimum des nombres de boules blanches et noires obtenues suite à un tirage.
   Déterminer la loi de probabilité de Y.

3.3. Espérance mathématique, variance et écart-type

Définition

Soit $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ l'univers image d'une variable aléatoire réelle X.
1. On appelle **espérance mathématique de X** le nombre noté E(X) et définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p(X = x_i).$$

2. On appelle **variance de X** le nombre positif noté V(X) et définie par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(X = x_i).$$

3. On appelle **écart-type** le nombre noté $\sigma(X)$ et définie par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

3.4. Fonction de répartition

Définition

Soit X la variable aléatoire définie sur un univers Ω. On appelle **fonction de répartition** de X, la fonction F telle que :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto F(x) = P(X \leq x) \end{aligned}$$

Exemple

Une entreprise loue des voitures à la journée. Elle dispose d'un parc de 16 voitures. Neuf véhicules sont systématiquement loués à des clients réguliers. La loi de probabilité du nombre de voitures louées par jour X est donnée dans le tableau suivant :

x_i	10	11	12	13	14	15	16
$p(X = x_i)$	0,05	0,10	0,37	0,27	0,17	0,03	0,001

1. Quelle est la probabilité de :
   a. louer moins de 13 voitures dans la journée ?
   b. louer au moins 14 véhicules dans la journée ?
2. Déterminer
   a. l'espérance du nombre de véhicule s loués dans la journée.
   b. l'écart-type du nombre de véhicules loués dans la journée.
3. Déterminer la fonction de répartition F de X. Construire la courbe de F dans un repère orthonormé.

3.5. Loi binomiale

Définition

- On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire ayant exactement deux éventualités appelés appelées **succès** et **échec**.
  La probabilité de l'événement succès est le paramètre de l'expérience de Bernoulli.
- On appelle **schéma de Bernoulli** toute suite de n ($n \in \mathbb{N}$) épreuves de Bernoulli identiques et indépendants.
  Le nombre n d'épreuves de Bernoulli et la probabilité p du succès d'une épreuve de Bernoulli sont les paramètres du schéma de Bernoulli.

Propriété 1

Soit un schéma de Bernoulli de paramètre n et p et X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus. On a :

- $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$;
- Pour tout $k \in X(\Omega)$, on a : $p(X = k) = C_n^p p^k (1-p)^{n-k}$;
- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$

Exemple

On tire simultanément au hasard trois boules d'une urne contenant huit boules numérotées de 1 et 8.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules de numéro impair obtenu.
1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer la variance de X.
3. Définir et représenter la fonction de répartition de X.

SA 3 Lieux géométriques dans le plan

Séquence 1 Isométries et applications affines du plan

1. Isométries du plan

Nous avions étudié en classe de première quelques isométries planes : les translations, les rotations et les symétries orthogonales. En terminale, étudions en plus une isométrie plane dite symétrie glissée.

1.1. Symétrie glissée

Définition

Soit (Δ) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
On appelle **symétrie glissée** d'axe (Δ) et de vecteur $\vec{u}$ la composée de la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et de la translation de vecteur $\vec{u}$.

Exemple
ABCD est un rectangle.
Construire son image par la symétrie glissée d'axe (BC) et de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Propriété 1

Une symétrie glissée n'admet pas de point invariant.

Propriétés 2

Soit (Δ) une droite du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
- Si $\vec{u}$ est un vecteur normal à (Δ), alors $t_{\vec{u}} \circ s_{\Delta}$ est une symétrie orthogonale.
- Si $\vec{u}$ n'est pas un vecteur normal à (Δ), alors $t_{\vec{u}} \circ s_{\Delta}$ est une symétrie glissée.

Exemple
ABCD est un rectangle.
Construire son image par la symétrie glissée :
- d'axe (AB) et de vecteur $\overrightarrow{BC}$;
- d'axe (AC) et de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

1.2. Classifications des isométries

Propriété 1

Soit f une isométrie du plan et A un point. Il existe une unique isométrie g et une unique translation t telles que : $g(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ et $f = t \circ g$.

Propriété 2

Une isométrie du plan qui laisse invariants trois points non alignés est l'application identique.

Propriété 3

Une isométrie du plan qui laisse invariants deux points invariants distincts A et B et qui n'est pas l'application identique est la symétrie orthogonale d'axe (AB).

Propriété 4

Une isométrie qui laisse invariant un seul point A est une rotation de centre A.

Propriété 5

Toute isométrie plane est soit une translation soit une rotation soit une symétrie orthogonale soit une symétrie glissée.

1.3. Déplacement, antidéplacement

Définitions

- Un déplacement est une isométrie qui conserve les angles orientés.
- Un antidéplacement est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé.

Propriétés 1

- Toute isométrie plane est soit un déplacement soit un antidéplacement.
- Tout déplacement est soit une translation soit une rotation.
- Tout antidéplacement est soit une symétrie orthogonale soit une symétrie glissée.

Propriété 2

Soit A, B, A' et B' quatre points du plan tels que $AB = A'B'$ et $A \neq B$.
Il existe un déplacement et un seul transformant A en A' et B en B'.

Propriété 3

Soit A, B, A' et B' quatre points du plan tels que $AB = A'B'$ et $A \neq B$.
Il existe un antidéplacement et un seul transformant A en A' et B en B'.

2. Applications affines

2.1. Généralités

Définitions

- On appelle **application affine** du plan $\mathscr{P}$, toute application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui conserve le barycentre de deux points.
- On appelle **transformation affine** du plan toute application affine bijective du plan.

Propriétés 1

- La composée de deux applications affines du plan est une application affine du plan.
- La réciproque d'une transformation affine du plan est une transformation affine du plan.

Définition

Soit f une application affine du plan $\mathscr{P}$ et soit $\mathscr{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan.
On appelle **application vectorielle associée à f** l'application de $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{V}$, notée F, telle que pour tous A et B de $\mathscr{P}$, on a : $\mathrm{F}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = \overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})}$.

Propriété 2

Soit f une application affine du plan, F l'application vectorielle associée à f.
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathscr{V}$ et pour tout réel α, on a :
- $\mathrm{F}(\vec{u}+\vec{v}) = \mathrm{F}(\vec{u}) + \mathrm{F}(\vec{v})$;
- $\mathrm{F}(\alpha\vec{u}) = \alpha\mathrm{F}(\vec{u})$.

Remarque
On a : $\mathrm{F}(\vec{0}) = \vec{0}$.

Vocabulaire.
On dit que F est une **application linéaire**.

Exemple
ABC est un triangle, f est l'application affine définie par : $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$, $f(\mathrm{B}) = \mathrm{C}$ et $f(\mathrm{C}) = \mathrm{I}$, où I est le milieu de [BC].
Déterminer l'expression analytique de f dans le repère $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$.

Propriété 3

Toute application affine conserve le barycentre de n points pondérés ($n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$).

Propriété 4

Une application affine est déterminée par la donnée de trois points non alignés et de leurs images.

Exemple

ABC est un triangle, I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [AC]. f est l'application affine du plan tel que $f(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$, $f(\mathrm{B}) = \mathrm{C}$ et $f(\mathrm{C}) = \mathrm{A}$.

1. Déterminer l'image de chacun des points I, J et K.
2. Soit G et G$'$ les centres de gravité respectifs des triangle ABC et IJK.
   Vérifier si $f(\mathrm{G}) = \mathrm{G}'$.

Propriété 5

Soit f une application affine du plan $\mathscr{P}$.
L'ensemble des points invariants par f est soit l'ensemble vide, soit un singleton, soit une droite soit un plan.

Propriété 6

Soit f une application affine, (AB) une droite, A$'$ et B$'$ les images respectives des points A et B par f.
• Si $\mathrm{A}' = \mathrm{B}'$, alors l'image par f de la droite (AB) est le singleton $\{\mathrm{A}'\}$.
• Si $\mathrm{A}' \neq \mathrm{B}'$, alors l'image par f de la droite de (AB) est la droite $(\mathrm{A}'\mathrm{B}')$.

Exemple

ABC est un triangle, f l'application affine définie par : $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$, $f(\mathrm{B}) = \mathrm{A}$ et $f(\mathrm{C}) = \mathrm{B}$.
Déterminer l'image de chacune des droites suivantes : (AB) et (AC).

Propriété 7

Soit f une application affine du plan, $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ deux droites parallèles.
Si l'image de la droite $(\mathscr{D}_1)$ par f est une droite $(\mathscr{D}'_1)$, alors l'image de $(\mathscr{D}_2)$ par f est une droite $(\mathscr{D}'_2)$ parallèle à $(\mathscr{D}'_1)$.

Exemple

ABCD est un parallélogramme, f est l'application affine définie par $f(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$, $f(\mathrm{B}) = \mathrm{C}$ et $f(\mathrm{C}) = \mathrm{D}$.
Construire l'image ABCD par f.

Propriété 8

Soit f une application affine de $(\mathscr{P})$.
• Si f est bijective, alors $f(\mathscr{P}) = \mathscr{P}$.
• Si f n'est pas bijective, alors $f(\mathscr{P})$ est soit un singleton soit une droite.

Exemple

ABC est un triangle, A$'$, B$'$ et C$'$ sont les milieux respectifs [AC], [AB] et [BC], f est l'application affine définie par : $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$, $f(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$ et $f(\mathrm{C}) = \mathrm{C}'$.
Démontrer que f est une transformation affine.

Propriété 9

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Soit f une application du plan $(\mathscr{P})$ dans lui-même.
f est une application affine de $(\mathscr{P})$ si et seulement si elle admet une expression analytique de la forme :

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'x + c' \end{cases},$$

où a, b, c, a', b' et c' des nombres réels.

Exemples

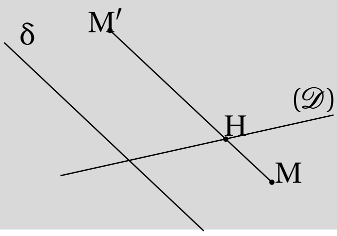
ABCD est un carré direct de centre O.
Déterminer l'expression analytique, dans le repère (A, B, C), de :

1. de l'isométrie f qui laisse invariant le point O et qui transforme les points B et C en les points C et D respectivement;
2. de l'application affine g du plan transforme les points A, B et C en les points C, D et A;
3. de l'application affine $g \circ f$ et $f \circ g$.

2.2. Affinités du plan

Définition

Soit $(\mathscr{D})$ une droite, δ une direction de direction celle de $(\mathscr{D})$ et k un nombre réel.
On appelle **affinité d'axe $(\mathscr{D})$, de direction δ et de rapport k** l'application f qui à tout point M du plan associe le point M$'$ tel que : $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$, où H est le projeté de M sur $(\mathscr{D})$ suivant la direction δ.



Lorsque δ est orthogonale à la direction de $(\mathscr{D})$, on dit que f est une **affinité orthogonale**.

Exemple

ABCD est losange de centre O.
Construire l'image de ABCD par :

- l'affinité d'axe (AB), de direction celle de (AC) et de rapport $-\frac{3}{2}$.
- l'affinité d'axe (BD), de direction celle de (AC) et de rapport $-\frac{3}{2}$.

Propriétés : Représentation graphique de fonctions et affinités

Soit f et g deux fonctions numériques à variable réelle, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectives de f et g dans le plan muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, et a un nombre réel non nul différent de 1.

- Si $g(x) = f(ax)$, alors $\mathscr{C}_g$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par l'affinité par rapport à l'axe des ordonnées, de direction celle de l'axe des abscisses et de rapport $\frac{1}{a}$.
- Si $g(x) = af(x)$, alors $\mathscr{C}_g$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par l'affinité par rapport à l'axe des abscisses, de direction celle de l'axe des abscisses et de rapport a.

Remarque

Dans le cas où le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est orthogonal, les affinités sont orthogonales.

Séquence 2 Conique

1. Généralités

Définition

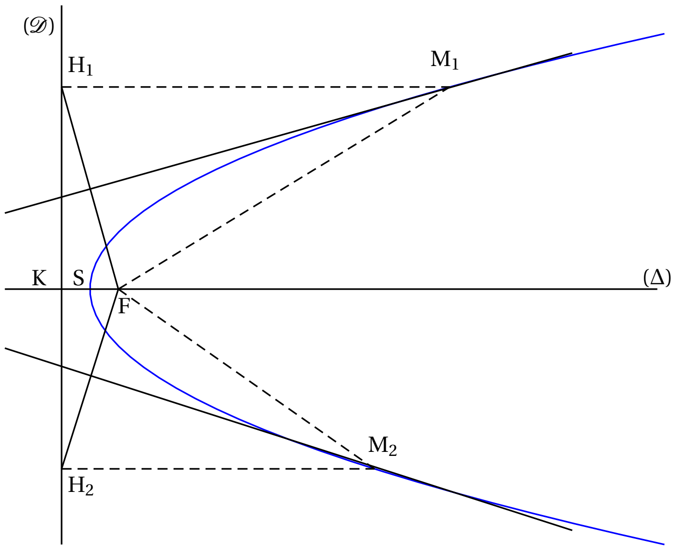
Soit $(\mathscr{D})$ une droite, F un point n'appartenant pas $(\mathscr{D})$ et e un nombre réel strictement positif. On appelle **conique de foyer F, de directrice $(\mathscr{D})$ et excentricité e** l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MH}} = e$, où H désigne le projeté orthogonal de M sur $(\mathscr{D})$.

2. Paraboles

2.1. Définitions et propriétés

Définition

On appelle **parabole** toute conique d'excentricité 1.



Exercice

Soit $(\mathscr{P})$ une parabole de foyer F et de directrice $(\mathscr{D})$. On désigne par K le projeté orthogonal de F sur $(\mathscr{D})$ et par (Δ) la droite (FK).

1. Justifier que (Δ) est un axe de symétrie de $(\mathscr{P})$.

2. a. Démontrer que le milieu S de [FK] appartient à $(\mathscr{P})$.

   b. Soit (T) la droite passant par S et parallèle à $(\mathscr{D})$. Démontrer que tout point de $(\mathscr{P})$ appartient au demi-plan contenant F et délimité par (T).
   (On pourra montrer que tout point M de $(\mathscr{P})$ vérifie : $\mathrm{MK} \leq \mathrm{MF}$.*)*

   c. Soit P un point de [SF], distinct de S, et $(\mathscr{D}_{\mathrm{P}})$ la perpendiculaire à (Δ) en P. Justifier qu'il existe deux points de $(\mathscr{D}_{\mathrm{P}})$ appartenant à $(\mathscr{P})$.

   d. En déduire une construction point par point de la parabole $(\mathscr{P})$.

Propriétés

Soit $(\mathscr{P})$ une parabole de foyer F et de directrice $(\mathscr{D})$.
• La droite (Δ) passant par F et perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ est un axe de symétrie de $(\mathscr{P})$.
La droite (Δ) est appelée **axe focal** de la parabole $(\mathscr{P})$.
• La parabole $(\mathscr{P})$ coupe son axe focal en un point unique S.
Le point S appelé **sommet** de la parabole $(\mathscr{P})$.

2.2. Equation réduite d'une parabole et d'une tangente à une parabole

Propriété 1 : Équation réduite d'une parabole

Soit $(\mathscr{P})$ la parabole de foyer F et de directrice $(\mathscr{D})$ de sommet S.
Dans le repère orthonormé $(S, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$, $(\mathscr{P})$ est la courbe d'équation $y^2 = 2px$ où p est la distance de F à $(\mathscr{D})$.

Le nombre réel est strictement positif p est appelé le **paramètre** de la parabole.

Remarques

• Dans le repère orthonormé $(S, \vec{i}, \vec{j})$, l'axe focal de la parabole est la droite de repère $(S, \vec{i})$, le foyer est le point $F(\frac{p}{2}, 0)$ et sa directrice est $(\mathscr{D}) : x = -\frac{p}{2}$.
• Un échange des axes du repères $(S, \vec{i})$ et $(S, \vec{j})$ conduit a une équation réduite de la forme : $x^2 = 2py$.
• Dans le repère orthonormé $(S, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe d'équation $y^2 = 2ax$ $(a \neq 0)$ est une parabole de sommet O, d'axe focal la droite de repère $(O, \vec{i})$ et de paramètre $|a|$

Exemple

On munit le plan du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. La distance du foyer F d'une parabole $\mathscr{P}$ à son axe focale (Δ) est noté d.
Déterminer l'équation réduite de $(\mathscr{P})$ dans chacun des cas suivants : $d = 2$, $d = 3$ et $d = 5$ dans un repère convenablement choisi.
2. Déterminer le foyer F et la distance de F à l'axe focale (Δ) de la parabole $(\mathscr{P})$ dans chacun des cas suivants : $(\mathscr{P}) : y = -4x^2$, $(\mathscr{P}) : x-2y^2+4y =$, $(\mathscr{P}) : x^2+2x+y = 0$, $(\mathscr{P}) : 2y-5x^2+x = 0$.
3. Déterminer l'équation réduite de la parabole $(\mathscr{P})$ de foyer F et d'axe focale (Δ) dans chacun des cas suivants :
   • $F(2, -1)$ et $(\Delta) : x = 4$;
   • $F(0, 1)$ et $(\Delta) : y = -3$;
   • $F(1, 2)$ et (Δ) a pour repère $(O, \vec{j})$;
   • $F(1, 1)$ et $(\Delta) : x + y = 1$.

Propriété 2 : Equation d'une tangente à une parabole

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit $(\mathscr{P})$ la parabole d'équation $y^2 = 2ax$ avec $(a \neq 0)$.
La tangente à $(\mathscr{P})$ en son point $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation : $yy_0 = a(x + x_0)$.

Exemple

Soit $(\mathscr{P})$ la courbe d'équation $y = x^2 + 2x - 1$.

Déterminer la tangente au point A(0, 1) de $(\mathscr{P})$.

2.3. Régionnement du plan par une parabole

Propriété 1

Soit $(\mathscr{P})$ une parabole de foyer F et de directrice $(\mathscr{D})$.
Pour tout point M du plan dont le projeté orthogonal sur $(\mathscr{D})$ est H, on a :
• si MF < MH, alors M est intérieur à $(\mathscr{P})$;
• si MF > MH, alors M est extérieur à $(\mathscr{P})$.

Propriété 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit $(\mathscr{P})$ la parabole d'équation $y^2 = 2ax$ avec $(a \neq 0)$ et $M(x, y)$ un point du plan.
• M est intérieur à $(\mathscr{P})$ si et seulement si $y^2 < 2ax$;
• M est extérieur à $(\mathscr{P})$ si et seulement si $y^2 > 2ax$.

3. Ellipses

3.1. Définitions et propriétés

Définition

On appelle **ellipse** toute conique d'excentricité e vérifiant $0 < e < 1$.

Exercice

Soit (Γ) une ellipse de foyer F, de directrice $(\mathscr{D})$ et d'excentricité $e = \frac{2}{3}$. On désigne par K le projeté orthogonal de F sur $(\mathscr{D})$ et par (Δ) la droite (FK).
1. Justifier que (Δ) est un axe de symétrie de (Γ).
2. Construire le cercle $(\mathscr{C})$, ensemble des points M tels que : $\frac{MF}{MK} = \frac{2}{3}$.
3. Justifier qu'il existe deux points A et A' de (Δ), appartenant à (Γ).
4. Soit M un point de (Γ) distinct de A et A'. Démontrer que $\frac{MF}{MK} < \frac{2}{3}$; en déduire que M est intérieur à $(\mathscr{C})$.
5. Soit P un point de [AA'], distinct de A et A', et $(\mathscr{D}_P)$ la perpendiculaire à (Δ) en P. Construire les points M de $(\mathscr{D}_P)$ appartenant à (Γ).
(On pourra remarquer que $FM = \frac{2}{3}KP$*.)*
6. En déduire une construction point par point de l'ellipse (Γ).

Propriétés

Soit (Γ) une ellipse de foyer F, de directrice $(\mathscr{D})$ et d'excentricité e, K le projeté orthogonal de F sur $(\mathscr{D})$.
• La droite (Δ) passant par les points F et K est un axe de symétrie de (Γ).
• L'ellipse (Γ) coupe la droite (Δ) en deux points A et A' vérifiant : $A = \text{bar}\{(F, 1), (K, -e)\}$ et $A' = \text{bar}\{(F, 1), (K, e)\}$.
• Le milieu O du segment est le centre de symétrie de l'ellipse.

Vocabulaire.

- La droite (Δ) est appelée **axe focal** de l'ellipse (Γ).
- Les points A et A$'$ sont appelés **sommets** de l'ellipse (Γ).
- Le point O est appelé **centre** de l'ellipse (Γ).

3.2. Etude analytique

Equation réduite d'une ellipse

Propriété

Soit (Γ) une ellipse de foyer F, de directrice $(\mathscr{D})$ et d'excentricité e.
Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{OA}\overrightarrow{OA}$, l'équation réduite de (Γ) est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$ avec $a = OA$ et $c = OF$.

Eléments caractéristiques d'une ellipse

	1er cas : $a > b$	2^{e} cas : $b > a$
Equation	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Demi-distance focale	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$c = \sqrt{b^2 - a^2}$
Excentricité	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{b}$
Axe focal	(AA')	(BB')
Foyers	$F(c,0)$ et $F(-c,0)$	$F(0,c)$ et $F(0,-c)$
Sommets	$A(a,0)$, $A'(-a,0)$, $B(0,b)$ et $B'(0,-b)$	
Cercle principale	Cercle de diamètre $[AA']$	Cercle de diamètre $[BB']$
Cercle secondaire	Cercle de diamètre $[BB']$	Cercle de diamètre $[AA']$
Directrices	$(\mathscr{D}) : x = -\frac{a^2}{c}$ et $(\mathscr{D}') : x = \frac{a^2}{c}$	$(\mathscr{D}) : y = -\frac{b^2}{c}$ et $(\mathscr{D}') : y = \frac{b^2}{c}$

Exemple

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer les éléments caractéristiques de l'ellipse d'équation : $2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 2 = 0$.

Equation de la tangente en un point de l'ellipse

Propriété

Soit (Γ) une ellipse d'équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
La tangente à (Γ) en un point $M(x_0, y_0)$ a pour équation : $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Représentation paramétrique de l'ellipse

Propriété 1

L'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ admet une représentation paramétrique de la forme :

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$$

Exemple

Le plan est muni du repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer une représentation paramétrique de l'ellipse d'équation $x^2-3x+2+4y^2-4y=\frac{3}{2}$.

Cercle principale et affinité

Propriété 2

Soit (Γ) une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$, de sommets A et A$'$ situé sur l'axe focal. Alors (Γ) est l'image du cercle de diamètre $[\mathrm{AA}']$ par l'affinité orthogonale d'axe (AA') et de rapport $\frac{b}{a}$.

Exemple

Le plan est muni du repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit les points $\mathrm{A}(2,0)$ et $\mathrm{B}(-2,0)$.
Déterminer l'image du cercle de diamètre [AB] par l'affinité orthogonale d'axe (AB) et de rapport 2.

3.3. Régionnement du plan par une ellipse

Définition bifocale de l'ellipse

Propriétés

- Soit (Γ) l'ellipse d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$, de foyers F et F'.
  Alors (Γ) est l'ensemble des points M du plan tels que : $\mathrm{MF}+\mathrm{MF}'=2a$.
- Soit F et F$'$ deux points du plan et distincts et a un réel strictement positif tels que : $\mathrm{FF}'<2a$.
  L'ensemble des points M du plan tels que $\mathrm{MF}+\mathrm{MF}'=2a$ est l'ellipse de foyers F et F$'$.

Exemple

- Soit F et F$'$ deux points tels que : $\mathrm{FF}'=8$. Déterminons l'équation réduite de l'ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que : $\mathrm{MF}+\mathrm{MF}'=12$ dans un repère convenable.
  On a : $8<12$ donc (Γ_1) est une ellipse de demi-distance focale c vérifiant $2c=8$.
  Dans le repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i}=\frac{1}{\mathrm{OF}}\overrightarrow{\mathrm{OF}}$, l'équation réduite de (Γ_1) est : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ avec a et b deux réels strictement positifs vérifiant : $2a=12$ et $c^2=a^2-b^2$. On a : $a=6$ et $b=3\sqrt{15}$.
  Donc (Γ_1) : $\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{(3\sqrt{15})^2}=1$.
- Le plan est muni du repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
  Soit les points $\mathrm{F}(-2,2)$ et $\mathrm{F}'(4,2)$.

Déterminons une équation de l'ensemble (Γ_2) des points M du plan vérifiant : $MF + MF' = 10$.
On a : $FF' = 6$ et $6 < 10$. Donc (Γ_2) est l'ellipse de centre $C(1,2)$, milieu du segment $[FF']$ et la demi-distance focale de (Γ_2) est : $c = CF' = 3$.
On remarque que : $\overrightarrow{CF'} = 3\,\overrightarrow{i}$.
Dans le repère orthonormé $(C, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que : $\overrightarrow{i} = \frac{1}{CF'}\overrightarrow{CF'}$, l'équation réduite de (Γ_2) est : $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ où $2a = 10$ et $c^2 = a^2 - b^2$. Donc $a = 5$ et $b = 4$ et on a : $(\Gamma_2) : \frac{X^2}{5^2} + \frac{Y^2}{4^2} = 1$.
Soit M un point de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
On a : $\overrightarrow{CM} = (x-1)\,\overrightarrow{i} + (y-2)\,\overrightarrow{j}$. Donc M a pour coordonnées $(x-1, y-2)$ dans le repère $(C, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Par suite, dans le repère orthonormé $(C, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, l'équation réduite de l'ellipse (Γ_2) est : $\frac{(x-1)^2}{5^2} + \frac{(y-2)^2}{4^2} = 1$.

Régionnement du plan par une ellipse

Propriétés

Soit (Γ) l'ellipse de foyers F et F′ définie par l'ensemble des points M du plan tels que : $MF + MF' = 2a$.
• Les points M du plan vérifiant $MF + MF' < 2a$ sont intérieurs à l'ellipse (Γ).
• Les points M du plan vérifiant $MF + MF' > 2a$ sont extérieurs à l'ellipse (Γ).

4. Hyperboles

4.1. Définition et propriétés

Définition

On appelle hyperbole toute conique d'excentricité e vérifiant $e > 1$.

Exercice

Soit $(\mathscr{H})$ une hyperbole de foyer F, de directrice $(\mathscr{D})$ et d'excentricité $e = 3$. On désigne par K le projeté orthogonal de F sur $(\mathscr{D})$ et par (Δ) la droite (FK).
1. Justifier que (Δ) est un axe de symétrie de $(\mathscr{H})$.
2. Construire le cercle $(\mathscr{C})$, ensemble des points M tels que : $\frac{MF}{MK} = 3$.
3. Justifier qu'il existe deux points A et A' de (Δ), appartenant à $(\mathscr{H})$.
4. Soit P un point de (Δ), distinct de A et A' de (Δ), et $(\mathscr{D}_P)$ la perpendiculaire à (Δ) en P.
   a. On suppose : $P \in [AA']$. Démontrer que : $PF > 3PK$. En déduire que :
$$\forall M \in (\mathscr{D}_P), MF > 3MH;$$
   et que $(\mathscr{D}_P) \cap (\mathscr{H}) = \varnothing$.
   b. On suppose désormais que P est extérieur à [AA']. Construire les points M de $(\mathscr{D}_P)$ appartenant à $(\mathscr{H})$.
   (On pourra remarquer que : $FM = 3KP$.)
5. En déduire une construction point par point de $(\mathscr{H})$.

Propriétés

Soit $(\mathscr{H})$ une hyperbole de foyer F, de directrice $(\mathscr{D})$ et d'excentricité e, K le projeté orthogonal de F sur $(\mathscr{D})$.
- La droite (Δ) est un axe de symétrie de l'hyperbole $(\mathscr{H})$.
- L'hyperbole $(\mathscr{H})$ coupe la droite (Δ) en deux points A et A′ tels que : $A = \text{bar}\{(F,1),(K,e)\}$ et $A' = \text{bar}\{(F,1),(K,-e)\}$.
- Le milieu O du segment $[AA']$ est un centre de symétrie de l'hyperbole $(\mathscr{H})$.

Vocabulaire.
- La droite (Δ) est appelée **axe focal** de l'hyperbole $(\mathscr{H})$.
- Les points A et A′ sont appelés **sommets** de l'hyperbole $(\mathscr{H})$.
- Le point O est appelé **centre** de l'hyperbole $(\mathscr{H})$.

4.2. Etude analytique

Equation réduite d'une hyperbole

Propriété

Soit $(\mathscr{H})$ une hyperbole de foyer F, de directrice $(\mathscr{D})$ et d'excentricité e.
Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{OA}\overrightarrow{OA}$, l'équation réduite de $(\mathscr{H})$ est : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$ avec $a = OA$ et $c = OF$.

Eléments caractéristique

Equation	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Demi-distance focal	$c = \sqrt{a^2+b^2}$	
Excentricité	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{b}$
Sommets	$A(a,0)$ et $A'(-a,0)$	$B(0,b)$ et $B'(0,-b)$
Foyers	$F(c,0)$ et $F'(-c,0)$	$F(0,c)$ et $F'(0,-c)$
Axe transverse	(AA')	(BB')
Axe non transverse	(BB')	(AA')
Directrices	$(\mathscr{D}) : x = \frac{a^2}{c}$ et $(\mathscr{D}') : x = -\frac{a^2}{c}$	$(\mathscr{D}) : x = \frac{b^2}{c}$ et $(\mathscr{D}') : x = -\frac{b^2}{c}$
Asymptotes	$(\Delta) : y = \frac{b}{a}x$ et $(\Delta') : y = -\frac{b}{a}x$	

Exemple

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la conique d'équation : $4x^2 - 24 - 9y^2 + 36y = 0$.

Equation de la tangente en un point de l'hyperbole

Propriété

Soit $(\mathscr{H})$ l'hyperbole d'équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
La tangente en un point $M_0(x_0, y_0)$ de $(\mathscr{H})$ a pour équation : $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

4.3. Régionnement du plan une hyperbole

Définition bifocale de l'hyperbole

Propriétés

- Soit $(\mathscr{H})$ une hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $(a > 0, b > 0)$, de foyers F et F′.
  $(\mathscr{H})$ est l'ensemble des points M du plan vérifiant $|MF - MF'| = 2a$.
- Soit F et F′ deux points du plan et distincts et a un nombre réel strictement positif tels que : $FF' > 2a$.
  L'ensemble des points M du plan tels que $|MF - MF'| = 2a$ est l'hyperbole de foyers F et F′.

Exemple

Soit F et f' deux points tels que : $FF' = 5$. Déterminer une équation réduite de l'hyperbole définie par : $|MF - MF'| = 4$. Construire-la.

Régionnement du plan une hyperbole

Propriétés

Soit $(\mathscr{H})$ une hyperbole de foyers F et F′ définie par l'ensemble des points M du plan dans lui-même tels que : $|MF - MF'| = 2a$.
- Les points M du plan vérifiant $|MF - MF'| > 2a$ sont intérieurs à l'hyperbole $(\mathscr{H})$.
- Les points M du plan vérifiant $|MF - MF'| < 2a$ sont extérieurs à l'hyperbole $(\mathscr{H})$.

Séquence 3 Similitude

Nous savions depuis la classe de première qu'une similitude est la composée d'une isométrie et d'une homothétie et lorsque l'isométrie est un déplacement (resp. un antidéplacement), la similitude est dite directe (resp. indirecte). Dans cette séquence, utiliserons essentiellement les nombres complexes pour caractériser les similitudes planes.

L'écriture complexe d'une similitude plane est une relation qui relie les affixes d'un point et de son image par cette similitude.

1. Similitude plane directe

1.1. Similitude plane et nombres complexes

Propriétés 1

- Toute similitude plane directe a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.
- Toute application du plan dans lui-même dont l'écriture complexe est de la forme $z' = az + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ est une similitude plane directe.

Propriétés 2

Soit s une similitude plane directe d'écriture complexe $z' = az + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.
- Si $a = 1$, alors s est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(b)$.
- Si $a \neq 1$, alors s admet un seul point invariant O et s'écrit comme la composée d'une rotation d'angle α et d'une homothétie de rapport k où α et k sont les argument et module respectifs de a.
- Si $a \neq 1$ et $|a| = 1$, alors s est une rotation.

Propriété 3

Soit s une similitude plane directe de rapport k et α et s' une similitude plane directe de rapport k' et α'.
- Les composées $s \circ s'$ et $s' \circ s$ sont des similitudes planes directes de rapport kk' et d'angle $\alpha + \alpha'$.
- La réciproque de la similitude s est la similitude plane directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\alpha$.

1.2. Caractérisation d'une similitude

Propriété 1

Soit f une application du plan dans lui-même, k et α deux nombres réels tels que : $k > 0$. f est une similitude plane directe de rapport si et seulement si pour tous points M et N d'images M′ et N′ par f, on a : $\mathrm{M'N'} = k\mathrm{MN}$ et $\mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{MN}}, \overrightarrow{\mathrm{M'N'}}}) \equiv \alpha[2\pi]$.

Propriété 2

Soit s la similitude plane directe de centre O, de rapport k et d'angle α. Pour tous points M et M$'$ distincts du plan distincts de O, on a :

$$\mathrm{M}' = s(\mathrm{M}) \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{OM}' = |k|\mathrm{OM} \\ \mathrm{mes}(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{MN}}, \overrightarrow{\mathrm{M'N'}}}) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}.$$

Propriété 3

Soit O, A et A$'$ trois points du plan tels que A $\neq$ O et A$'$ $\neq$ O.
Il existe une unique similitude plane directe de centre O qui transforme A en A$'$.

Propriété 4

Soit k un réel strictement positif, α un nombre réel, A et A$'$ deux points du plan.
Il existe une similitude directe de rapport k et d'angleα qui transforme A en A$'$.

Propriété 5

Soit A, B, A$'$ et B$'$ quatre points du plan tels que A $\neq$ B et A$'$ $\neq$ B$'$.
Il existe une unique similitude directe qui transforme A en A$'$ et B en B$'$.

1.3. Similitude et configurations

Propriétés

Toute similitude plane directe de rapport k :
- conserve l'alignement de points, le parallélisme de droites, l'orthogonalité de droites, les angles orientés, le barycentre ;
- multiplie les longueurs par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes $|k|^3$;
- transforme les droites en une droites, les demi-droites en demi-droites, les segments en segments, les cercles en cercles.

2. Similitude plane indirecte

Propriété 1

Toute similitude plane indirecte a une écriture complexe de la forme : $z' = a\overline{z} + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Propriétés 2

Soit s une similitude plane indirecte d'écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

- Si $|a| = 1$, alors s est un antidéplacement et cet antidéplacement est une réflexion si et seulement si $a\overline{b} + b = 0$.
- Si $|a| \neq 1$, alors s admet un unique point invariant O et s'écrit comme la composée d'une symétrie orthogonale d'axe $(\mathscr{D})$ et d'une homothétie de centre O et de rapport k où $k = |a|$ et $(\mathscr{D})$ une droite passant par O.