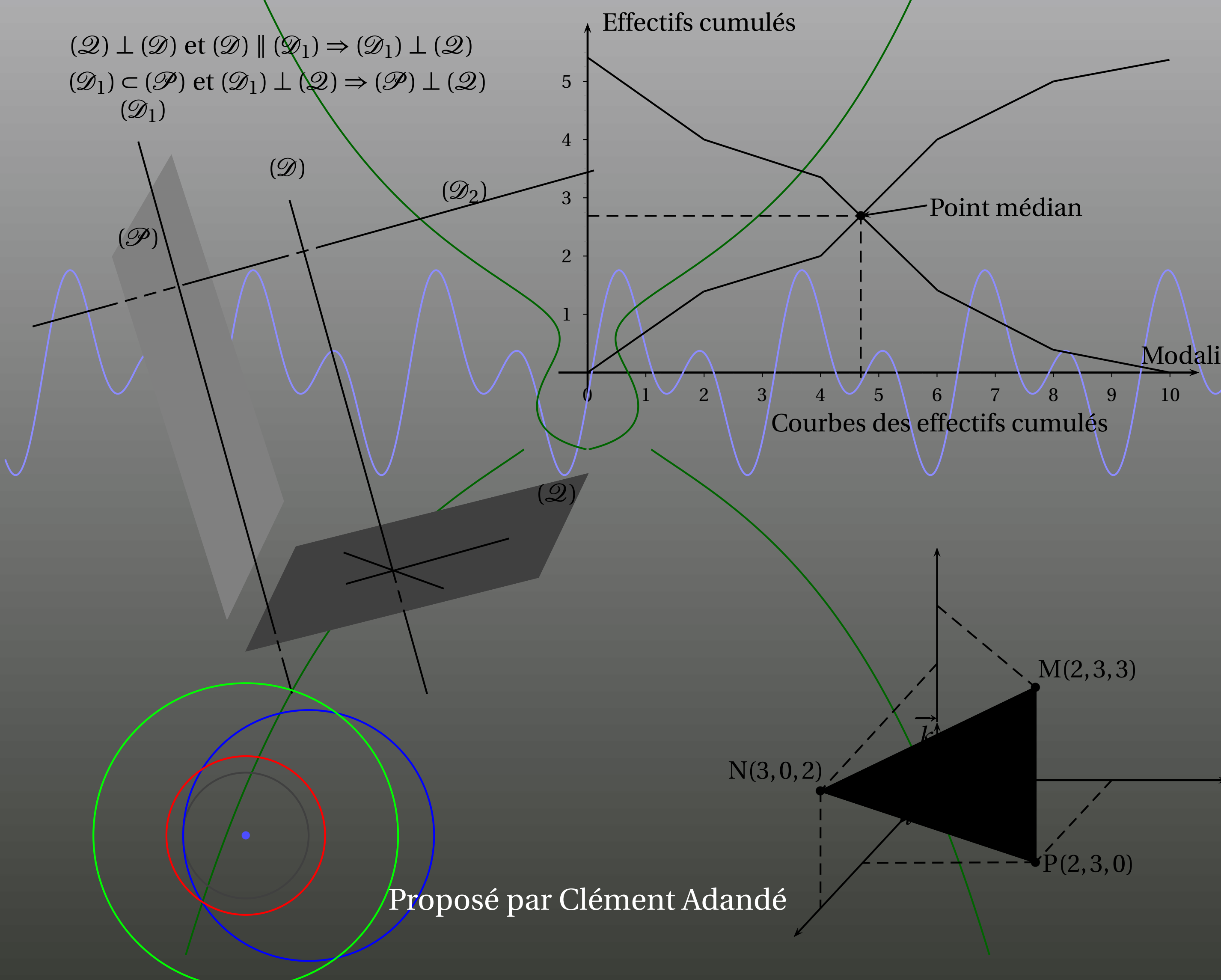
Année scolaire 2019 – 2020

Cours de Mathématiques 1ère C



Proposé par Clément Adandé

Dernière édition September 9, 2024

Contents

Situation d'apprentissage 1

Configuration de l'espace

Depuis la classe de seconde, nous savons que, dans l'espace, deux droites non parallèles peuvent ne pas être sécantes mais qu'une droite et un plan sont soient parallèles soient sécantes et qu'il en est de même pour deux plans. Dans ce chapitre, nous étudierons l'orthogonalité, les vecteurs dans l'espace, le produit scalaire sur l'ensemble des vecteurs de l'espace puis nous reformuleront quelques propriétés de la géométrie dans l'espace l'aide des vecteurs et le produit scalaire en géométrie analytique.

Séquence 1 Orthogonalité dans l'espace

1. Droites orthogonales

Définition

Deux droites de l'espace sont dites **orthogonales** lorsque, pour un point de l'espace donné, les parallèles à ces droites passant par ce point sont perpendiculaires.
On écrit : $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{D}')$ pour signifier qu'une droite $(\mathscr{D})$ est orthogonale à une autre droite $(\mathscr{D}')$.

Exemple

ABCDEFGH est un cube, et les points I et J sont les milieux respectifs des carrés ABCD et EFGH. Les droites (IJ) et (AD) sont orthogonaux. En effet : (IJ)$\parallel$(BF); (AD)$\parallel$(BC); (BF)$\perp$(BC) et (BF)$\cap$(BC)={B}.
Donner deux autres exemples de droites orthogonales.

Remarque

Deux droites de l'espace sont perpendiculaires lorsqu'elles sont orthogonales et sécantes.

Propriété 1

Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

Démonstration

Soient $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ deux droites de l'espace.
Supposons que $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont orthogonales. Soit (Δ) une droite parallèle à $(\mathscr{D}_1)$. Montrons que $(\Delta) \parallel (\mathscr{D}_2)$.
Ils existent deux droites $(\mathscr{D}_1')$ et $(\mathscr{D}_2')$ perpendiculaires en un point I et parallèles à $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ respectivement. Or $(\Delta) \parallel (\mathscr{D}_1')$ car $(\Delta) \parallel (\mathscr{D}_1)$. D'où les droites (Δ) et $(\mathscr{D}_2)$ sont orthogonales.
On conclut alors que : si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

Exemple

ABCDEFGH est un cube. Les droites (AE) et (DC) sont orthogonales. En effet : (DC)$\parallel$(AB) et (AE)$\perp$(AB).

2. Droite et Plan Perpendiculaire

Définition

Une droite $(\mathscr{D})$ est perpendiculaire à un plan $(\mathscr{P})$ lorsque $(\mathscr{D})$ est orthogonale à deux droites sécantes du plan $(\mathscr{P})$. On note $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P})$ ou $(\mathscr{P}) \perp (\mathscr{D})$.

Exemple

ABCDEFGH est un cube. Montrons que la droite (DH) est perpendiculaire à (EFG).

On a : (DH)⊥(HG) et (HG)∥(EF). Donc (DH)⊥(EF) (1).

On a : (DH)⊥(HE) et (HE)∥(GF). Donc (DH)⊥(GF) (2).

On a : (EF) et (FG) sont deux droites sécantes du plan (EFG) (3).

De (1), (2) et (3), on déduit que (DH)⊥(EFG).

Propriété 2

Si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

Démonstration

Soit $(\mathscr{D})$ une droite et $(\mathscr{P})$ un plan de l'espace. Supposons que $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P})$.

Soit (Δ) une droite du plan $(\mathscr{P})$. Montrons que $(\mathscr{D}) \perp (\Delta)$.

Comme $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P})$, ils existent deux droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sécantes de $(\mathscr{P})$ perpendiculaires à $(\mathscr{D})$ en un point I. Il existe une droite (Δ') du plan $(\mathscr{P})$ parallèle à (Δ) et passant par I. Soient $J \in (\Delta')$ et $J' \in (\mathscr{D}_1)$ tel que : $IJ = IJ'$. Donc les triangles IJK et IJ'K sont semblables car ils ont de deux à deux

Exemple

ABCDEFGH est un cube. Montrons que les droites (AB) et (ED) sont orthogonales.

La droite (AB) est perpendiculaire au plan (EAD). Donc (AE) est orthogonale à la droite (ED).

Propriété 3

(admise)

1. Par un point A de l'espace, il existe une unique droite passant par A et orthogonale à un plan donné.
2. Par un point A de l'espace, il existe un unique plan passant par A et orthogonale à une droite donnée.

Propriété 4

1. Si deux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont parallèles, tout plan $(\mathscr{P})$ orthogonal à $(\mathscr{D})$ est orthogonal à $(\mathscr{D}')$.
2. Si deux plans sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.
3. Si deux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont orthogonales à un même plan $(\mathscr{P})$, alors elles sont parallèles.
4. Si deux plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles.

Démonstration

Exemple

ABCDEFGH est un cube. On désigne par I, J, K, L et M les milieux respectifs des segments [AE], [EH], [BF], [BC] et [CG].

1. Montrer que (BG) $\perp$ (EFC) puis en déduire que (IJ) $\perp$ (EFC).
2. Montrer que (AH) $\perp$ (IKL).
3. Montrer que (IJ) $\parallel$ (ML).
4. Soit $(\mathscr{P})$ le plan perpendiculaire à la droite (BG) passant par le point M. Justifier que $(\mathscr{P}) \parallel$ (IKL).

Méthode.

Pour montrer que deux droites sont orthogonales, on peut :

1. trouver deux droites perpendiculaires qui leurs sont parallèles respectivement en un point donné ;
2. trouver une droite parallèle à l'un et orthogonale à l'autre ;
3. trouver un plan contenant l'un et orthogonale à l'autre.

Définition : Distance d'un point à une droite, à un plan

1. On appelle distance d'un point A à une droite $(\mathscr{D})$ et on note $d(\mathrm{A}, (\mathscr{D}))$, la distance AH où H est le point d'intersection de la droite $(\mathscr{D})$ et du plan perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ en A.
2. On appelle distance d'un point A à un plan $(\mathscr{P})$, la distance AH où H est le point du plan $(\mathscr{P})$ et la droite perpendiculaire à $(\mathscr{P})$ en A.

Exemple

Exercice 1.f, Page 114 (CIAM 1ère SM)

3. Plans perpendiculaires

Définition

Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un d'entre eux contient une droite orthogonale à l'autre.

Exemple

ABCDEFGH est un cube et O est le centre du carré EFGH. Démontrer les plans (EFG) et (BOD) sont perpendiculaires.

Propriété 5

1. Si une droite est orthogonale à un plan $(\mathscr{P})$, tout plan parallèle à $(\mathscr{D})$ est perpendiculaire à $(\mathscr{P})$.
2. Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite orthogonale à l'un est parallèle à l'autre.
3. Si deux plans sont perpendiculaires, tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.
4. Un plan est perpendiculaire à deux plans sécants si et seulement si il est orthogonal à leur droite intersection.

Exemple

ABCDEFGH est un cube et O est le centre du carré EFGH.

1. Démontrer les plans (EFG) et (BOD) sont perpendiculaires.
2. Montrer que la droite (AE) est parallèle au plan (BOD).
3. Montrer que les plans (EFG) et (ADH) sont perpendiculaires.
4. Montrer que (ABC) est perpendiculaire aux plans (AEC) et (DBF).

4. Projection orthogonale sur un plan, sur une droite

4.1. Projection orthogonale sur un plan

Définition

On appelle **projection orthogonale sur un plan** $(\mathscr{P})$ l'application de l'espace dans lui-même qui associe à tout point M le point M' qui est le point d'intersection de $(\mathscr{P})$ avec la droite passant par M et perpendiculaire à $(\mathscr{P})$. M' est appelé le **projeté orthogonal de M sur** $(\mathscr{P})$.

Exemple

ABCBEFGH est un pavé droit et O est le centre du carré ABCD. Quel est projeté orthogonal de O sur le plan (EFG).

Propriété 6

1. L'ensemble des points invariants[a] d'une projection orthogonale sur un plan $(\mathscr{P})$ est le plan $(\mathscr{P})$ lui-même.
2. Soit p une projection orthogonale sur un plan $(\mathscr{P})$. L'image d'une droite par p est :
   - un singleton si $(\mathscr{D}) \perp (\mathscr{P})$;
   - une droite si $(\mathscr{D})$ n'est pas orthogonale à $(\mathscr{P})$.
3. Si A et B sont des points d'images respectives A' et B' par une projection orthogonale sur un plan $(\mathscr{P})$, alors l'image de [AB] par p est :
   - le singleton {A'} si $(AB) \perp (\mathscr{P})$;
   - le segment [A'B'] si (AB) n'est pas perpendiculaire à $(\mathscr{P})$. Dans ce cas, on a : A'B'=AB si $(AB) \parallel (\mathscr{P})$ et $A'B' < AB$ si (AB) n'est pas p arallèle à $(\mathscr{P})$.
4. L'image par une projection orthogonale sur un plan, du milieu d'un segment dont le support n'est pas perpendiculaire au plan, est le milieu du segment image.

[a]Un point invariant par une application f est un point telle que : $f(M) = M$.

Démonstration

Exemple

ABCBEFGH est un pavé droit de centre O. Soit p la projection orthogonale sur le plan (ABC). Déterminer $p(D)$, $p(DH)$, $p([EG])$, $p(O)$ et $p(BG)$.

4.2. Projection orthogonale sur une droite

Définition

On appelle projection orthogonale sur une droite $(\mathscr{D})$, l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point M associe le point d'intersection M' de $(\mathscr{D})$ et du plan perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ et passant par M.

Exemple

ABCBEFGH est un cube. Déterminer le projeté orthogonal de B sur la droite (EG).

Propriété 7

Soit p une projection orthogonale sur une droite $(\mathscr{D})$.

1. L'ensemble des points invariants par p est la droite $(\mathscr{D})$.
2. L'image par p d'une droite orthogonale à $(\mathscr{D})$ est un singleton.
3. L'image par p d'une droite non orthogonale à $(\mathscr{D})$ est la droite $(\mathscr{D})$.
4. L'image par p du milieu d'un segment dont le support n'est pas orthogonal à $(\mathscr{D})$ est le milieu du segment image.

Démonstration

Soit p une projection orthogonale sur une droite $(\mathscr{D})$.

1. Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble des points invariants par p. Soit M un point de l'espace.
   $(\Longrightarrow)$ Supposons que $\mathrm{M} \in \mathscr{I}$. Alors on a : $p(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$ et ainsi $\mathrm{M} \in (\mathscr{D})$. Donc $\mathscr{I} \subset (\mathscr{D})$. $(\Longleftarrow)$ Supposons que $\mathrm{M} \in \mathscr{D}$. Alors M est le point d'intersection de $(\mathscr{D})$ et du plan perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ et passant par M. Donc $(\mathscr{D}) \subset \mathscr{I}$.
   On a alors : $(\mathscr{D}) = \mathscr{I}$.
2. Soit (Δ) une droite orthogonale à $(\mathscr{D})$. L'image par p de la droite (Δ) est :
   $$p(\Delta) = \{p(\mathrm{M}), \mathrm{M} \in (\Delta)\} = \{\mathrm{M}' | \exists \mathrm{M} \in (\Delta), p(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'\}.$$
   Soit $\mathrm{M}' \in p(\Delta)$. Alors il existe un point M de (Δ) tel que p(M)=M'. M' étant le point d'intersection de $(\mathscr{D})$ et du plan perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ passant par M, on a : $(\mathrm{M}'\mathrm{M}) = (\Delta)$ puisque $\mathrm{M} \in \Delta\mathrm{D})$ et $(\Delta) \perp (\mathscr{D})$. Ainsi $\mathrm{M}' = (\mathscr{D}) \cup (\Delta)$ et on pose $\mathrm{I} = (\mathscr{D}) \cup (\Delta)$ puisque deux droites se coupent en un seul point. On a : $\mathrm{M}' \in \{\mathrm{I}\}$ et $p(\Delta) \subset \{\mathrm{I}\}$.
3. Soit (Δ) une droite non orthogonale à $(\mathscr{D})$. L'image par p de la droite (Δ) est :
   $$p(\Delta) = \{p(\mathrm{M}), \mathrm{M} \in (\Delta)\} = \{\mathrm{M}' | \exists \mathrm{M} \in (\Delta), p(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'\}.$$
   On montre que : $p(\Delta) = (\mathscr{D})$.
4. Soit A et B deux points de l'espace d'images respectives A' et B' par p et I le milieu de [AB].
   – Si A=B, alors I=A et l'image par p de A est A'.
   – Supposons que A et B sont distincts. Alors les droites (AA') et (BB') tous perpendiculaires à $(\mathscr{D})$ sont distincts et donc $\mathrm{A}' \neq \mathrm{B}'$. Soit I' un point tel que $p(\mathrm{I}) = \mathrm{I}'$.
   Montrons que I' est le milieu de [A'B'].
   La parallèle à la droite (A'B') et passant par A coupent les droites (II') et (BB') en M et en N respectivement. AA'B'N est un rectangle.
   La propriété de Thalès appliquée au triangle ABN permet d'écrire :
   $$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IB}}.$$
   I est milieu [AB] donc on a : $\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{IB}} = 1$ et on déduit que $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MN}} = 1$. Donc AM=MN. D'où A'I'=I'B' et ainsi I' est le milieu du segment [A'B'].

Exemple

ABCBEFGH est un cube et O est le centre du cube. Soit p la projection orthogonale sur la droite (AE). Déterminer $p(\mathrm{AE})$, $p(\mathrm{B})$, $p([\mathrm{BG}])$, $p(\mathrm{BD})$ et $p(\mathrm{O})$.

Exercices

Exercices 1, 2, 3, bar4, bar6, 7, bar8, 9, 10, 16, 17, 19, 23
Pages 120, 121
CIAM 1ère SM

Séquence 2 Vecteurs de l'espace

1. Caractérisation d'un vecteur

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ de l'espace est caractérisé par :
•sa direction, qui est celle de la droite (AB);
•son sens, de A vers B;
•sa longueur, la distance AB.

Propriété 1

Soient A, B, C et D des points de l'espace. Les énoncés suivantes sont équivalentes :
1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$;

AD et [BC] ont même milieu ;
2. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Propriété 2

Pour tout point O et tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un et un seul point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.

Exemple

ABC est triangle. Placer un point I tel que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BC}$.

2. Opération sur les vecteurs

Définition : Somme de deux vecteurs

Soients $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs et A, B, C des points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
•Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires, la somme $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AB}$ tel que ABCD soit un parallélogramme.
•Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, leur somme est caractérisée par :
–la direction de $\overrightarrow{u}$;
–le sens $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est celui de $\overrightarrow{u}$ si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont même sens et celui du vecteur qui a la plus grande longueur s'ils sont de sens contraires.
–la longueur de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est AB+AC si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont même sens et la différence de leurs longueurs s'ils sont de sens contraires.

Exemple

ABC est un triangle.

1. Placer un point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$.
2. Construire les vecteurs suivants : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{IB}$ avec I le milieu du segment [BD].

Propriété 3: Rélation de Chasles

Soit A et B deux points de l'espace. Pour tout point M, on : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$.

Définition : Produit d'un vecteur par un réel

Soient $\vec{u}$ un vecteur et k un nombre réel. Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur $k\vec{u}$ égale au vecteur nul si $k = 0$ et si $k \neq 0$, il est tel que :
- sa direction soit celle de $\vec{u}$;
- son sens soit celui de $\vec{u}$ si $k > 0$ et le sens contraire de $\vec{u}$ si $k < 0$;
- sa longueur soit $|k| \cdot AB$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Propriété 4

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace et α et β deux nombres réels. On a :
1. $\alpha\vec{u} = \vec{0} \iff \alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$;
2. $(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$;
3. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$;
4. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$;
5. $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$.

Exemple

Exercice 1.b - Page 130

3. Vecteurs coplanaires

Définition

Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ trois vecteurs de l'espace. On dit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires lorsque les points A, B, C et D appartiennent à un même plan de l'espace.

Cette définition est indépendant du choix du point A.

Exemple

ABCD est un tétraèdre. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils coplanaires?

Propriété 5

1. Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si l'un d'eux s'écrire comme combinaison linéaire des deux autres.
2. Si deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.

Exemple

ABCDEFGH est un cube.

1. Citer quatre vecteurs coplanaires.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont-ils coplanaires?

Propriété 6

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe une combinaison linéaire de ces vecteurs égale au vecteur nul sans que ses coefficients ne soient tous nuls.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont non coplanaires si et seulement si le seul triplet (α, β, γ) de nombres réels tels que $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ est le triplet $(0, 0, 0)$.

Exemple

ABCDEFGH est un cube. Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont coplanaires. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DH}$?

4. Caractérisation vectorielle d'une droite, d'un plan

Propriété 7

1. Soit $(\mathscr{D})$ une droite passant par un point A et dirigée par un vecteur $\overrightarrow{u}$ (on dit que $(\mathscr{D})$ a pour repère $(A, \overrightarrow{u})$). Pour tout point M de l'espace, M appartient à $(\mathscr{D})$ si et seulement il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u}$.
2. Soit $(\mathscr{P})$ un plan passant par un point A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (on dit que $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère du plan $(\mathscr{P})$). Pour tout point M de l'espace, M appartient à $(\mathscr{P})$ si et seulement si à il existe un couple (α, β) de réel tel que : $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$.

Exemple

ABCDEFGH est un cube.

1. Donner deux repères de la droite (EF).
2. Donner deux repères du plan (EGC).
3. On considère un point M de l'espace tel que $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$. Dans quel plan se trouve t-il? Placer-le.

5. Base de l'ensemble des vecteurs de l'espace

On désigne par $\mathscr{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace et par $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de l'espace .

Définition

On appelle **base** de $\mathscr{W}$ tout triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de vecteurs non coplanaires.

Exemple

ABCDEFGH est un cube. Citer trois bases de $\mathscr{W}$.

Propriété 8

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathscr{W}$. Pour tout vecteur $\vec{u} \in \mathscr{W}$, il existe un unique triplet (x, y, z) de nombres réels tel que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
Le triplet (x, y, z) est appelé **triplet de coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on note $\vec{u}(x, y, z)$.

Exemple

ABCDEFG est un cube d'arête 1. Déterminer le triplet de coordonnées du point $\overrightarrow{EC}$ dans la base $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH})$.

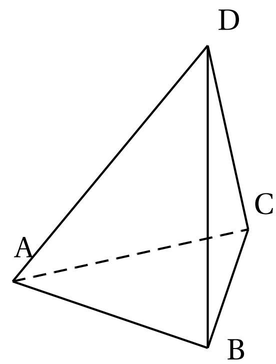
Définition

1. Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthogonale** lorsque les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux.
2. Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **orthonormé** lorsque les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont des vecteurs unitaires, deux à deux orthogonaux.

Exemple

ABCD est un tétraèdre tel que les triangles ABC, BDC et ABD soient rectangles en B.

1. Montrer que le triplet $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$ est une base orthonormale.
2. En déduire une base orthonormée.
3. On désigne par G le centre de gravité du triangle ADC. Déterminer les coordonnées $\overrightarrow{BG}$ dans $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$.



6. Repère de $\mathscr{E}$

Définition

1. On appelle repère de l'espace $\mathscr{E}$:
   - ou bien un quadruplet (O, I, J, K) de points non coplanaires ;
   - ou bien un quadruplet $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, où O est un point de $\mathscr{E}$ et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, une base de $\mathscr{W}$.
2. Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère et M un point de l'espace $\mathscr{E}$. L'unique triplet (x, y, z) de nombres réels tel que : $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ est appelé triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Vocabulaire.

- Le point O est appelé l'**origine** du repère.
- Les nombres x, y et z sont appelés respectivement **abscisse, ordonnée et cote** du point M.
- Les droites de repères $(O, \overrightarrow{i})$, $(O, \overrightarrow{j})$ et $(O, \overrightarrow{k})$ sont appelées axes de coordonnées du repère.

Exercices

Exercices 1.f, 3, 5, 7, 10, 13, 14, 16, 17, 18, 19
Pages 130, 141, 142
CIAM 1ère SM

Séquence 3 Produit scalaire

Définition

Soient A, B, C trois points de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

1. On appelle **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et défini par $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \text{barAB} \cdot \text{barAH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
2. On appelle **norme** de $\vec{u}$ le nombre positif noté $||\vec{u}||$ et défini par : $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$. $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé le **carré scalaire** et on le note $\vec{u}^2$.
3. Un vecteur $\vec{u}$ est dit **unitaire** lorsque $||\vec{u}|| = 1$.

Exemple

ABCDEFGH est un cube d'arête a et O est le centre du carré ABCD. Les points I et J sont les milieux des segments [AB] et [BC].

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$.
2. Calculer $\left|\left|\overrightarrow{IJ}\right|\right|$.
3. Donner un vecteur directeur unitaire de la droite (AG).

Propriété 1

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. On note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Exemple

ABCDEFGH est un cube d'arête a et O est le centre du carré ABCD. Justifier que les droites (AD) et (OH) sont orthogonaux.

Propriété 2

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs et α un nombre réel. On a:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
2. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$;
3. $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$;
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$;
5. $||\alpha \vec{u}|| = |\alpha| \, ||\vec{u}||$;
6. $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$.

Exemple

ABCDEFGH est un cube d'arête a et O est le centre du carré ABCD. Calculer $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{DG}$.

Exercice 1

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base Soit $u = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$ et $v = x'\overrightarrow{e_1} + y'\overrightarrow{e_2} + z'\overrightarrow{e_3}$ deux vecteurs.

1. Calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.
2. On suppose que la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est orthonormale. Que vaut alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.
3. On suppose que la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est orthonormée. Que vaut maintenant $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

Propriété 3

Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une **base orthonormée** de l'espace et $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$ deux vecteurs de l'espace. On a :

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$;
2. $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Exemple

ABCDEFGH est un cube d'arête a. On pose $\overrightarrow{i} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{j} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{k} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}$.

1. Démontrer que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base de l'espace.
2. Calculer $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Propriété 4

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de non nuls. On a : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \cdot ||\overrightarrow{v}|| \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$.

Exemple

Exercice 22
Page 142
CIAM 1ère SM

Exercices

Exercices 24, 25, 29, 30, 31, 32
Pages 142, 143
CIAM 1ère SM

Séquence 4 Géométrie analytique

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1. Équations cartésiennes

Définition : Vecteur normal à un plan

Soit $(\mathscr{P})$ un plan de l'espace. On appelle vecteur normal à $(\mathscr{P})$ tout vecteur directeur de toute droite perpendiculaire à $(\mathscr{P})$.

Exemple

ABCDEFGH est un cube. Donner un vecteur normal au plan (EFC).
(*On pourra d'abord montrer que* $(\mathrm{BG}) \perp (\mathrm{EFC})$)

Propriété 1: Caractérisation d'un plan à l'aide d'un vecteur normal

Soit $(\mathscr{P})$ un plan passant par un point A et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n}$. Pour tout point M de l'espace, on a : $\mathrm{M} \in (\mathscr{P}) \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

Exemple

ABCDEFGH est un cube de centre O. On munit l'espace du repère $(\mathrm{A}; \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}})$. Déterminer un vecteur normal au plan (BDG).

Propriété 2: Équation cartésienne d'un plan

Soit (a, b, c) un triplet de réels non tous nuls.
- L'équation cartésienne d'un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ est sous la forme $ax + by + cz + d = 0$.
- L'équation $ax + by + cz + d = 0$ est celle d'un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a, b, c)$.

Remarque

Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, si un plan a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, alors un tout vecteur $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ vérifiant $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ est un vecteur directeur de ce plan et tout vecteur colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ est un vecteur normal de ce plan.

Exemple

ABCDEFGH est un cube de centre O. On munit l'espace du repère $(\mathrm{A}; \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}})$. Déterminer une équation cartésienne du plan (BDG).

Exercice 1

L'espace est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$ dans chacun des cas suivants.
   - $A(2,1,1)$ et $\vec{n}(4,3,2)$;
   - $A(-3,4,1)$ et $\vec{n}(1,1,1)$;
   - $A(0,0,1)$ et $\vec{n}(7,-3,-4)$.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ dans chacun des cas suivants.
   - $A(-1,1,1)$, $\vec{u}(1,0,1)$ et $\vec{v}(2,1,0)$;
   - $A(0,3,-3)$, $\vec{u}(2,3,1)$ et $\vec{v}(2,7,1)$;
   - $A(2,0,3)$, $\vec{u}(4,1,3)$ et $\vec{v}(-2,-2,1)$.

Propriété 3: Système d'équations cartésiennes d'une droite

- Toute droite de l'espace est caractérisée par un système d'équations cartésiennes de deux plans sécantes.
- Le système d'équations cartésiennes de deux plans sécantes est un système d'équations cartésiennes de leur droite d'intersections.

Méthode.

Pour déterminer un système d'équations cartésiennes d'une droite $(\mathscr{D})$ de repère $(A, \vec{u})$ avec $A(x_0, y_0, z_0)$ et $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, on peut :

- trouver un vecteur normal $\vec{n_1}(a, b, c)$ d'un plan $(\mathscr{P}_1)$ contenant $(\mathscr{D})$;
- trouver un vecteur normal $\vec{n_2}(a', b', c')$ d'un plan autre $(\mathscr{P}_2)$ contenant $(\mathscr{D})$ tel que les vecteurs $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ soient non colinéaires ;
- déterminer les équations cartésiennes des plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sachant qu'ils passent tous deux par le point A.

Exemple

ABCDEFGH est un cube de centre O. On munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite (BG).

Exercice 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite $(\mathscr{D})$ de repère $(A, \vec{u})$ dans chacun des cas suivants.

1. $A(2,1,-4)$ et $\vec{u}(2,1,0)$;

2. $A(0,0,1)$ et $\overrightarrow{u}(-2,-2,1)$;
3. $A(1,1,1)$ et $\overrightarrow{u}(4,0,8)$;
4. $A(2,-1,-1)$ et $\overrightarrow{u}(7,-3,-4)$;
5. $A(-2,1,-4)$ et $\overrightarrow{u}(5,5,5)$;
6. $A(2,0,\sqrt{2})$ et $\overrightarrow{\ }(\ 1,2,1)$.

Propriété 4

Soit $(\mathscr{D})$ la droite passant $A(x_0, y_0, z_0)$ et dirigé par $\overrightarrow{u}(a, b, c)$.
•Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$, alors un système d'équations cartésiennes de $(\mathscr{D})$ est donné par :

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.$$

•Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c = 0$, alors un système d'équations cartésiennes de $(\mathscr{D})$ est donné par :

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} \\ z = z_0 \end{cases}.$$

•Si $a \neq 0$, $b = 0$ et $c = 0$,alors un système d'équations cartésiennes de $(\mathscr{D})$ est donné par :

$$\begin{cases} y & = y_0 \\ z & = z_0 \end{cases}.$$

Exemple

On munit l'espace du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Déterminer un système d'équation de la droite de repère $(O, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k})$.

2. Représentations paramétriques d'un plan, d'une droite

Définition : Représentation paramétrique d'une droite

L'espace est muni du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Soit $(\mathscr{D})$ la droite passant par le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et dirigé par le vecteur $\overrightarrow{u}(a, b, c)$. On dit que le système

$$\begin{cases} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \ (t \in \mathbb{R}) \\ z &= z_0 + ct \end{cases}$$

est une représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$.

Exemple

On munit l'espace du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1. Déterminer un système d'équation de la droite $(\mathscr{D})$ de repère $(O, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k})$.
2. Donner une représentation paramétrique de $(\mathscr{D})$. Donner deux points de cette droite.
3. Vérifier si les points $A(2, 0, 2)$, $B(-1, 2, 0)$ et $C(6, 0, -6)$ appartiennent à la droite $(\mathscr{D})$.

Exercice 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Déterminer un représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$ de repère $(A, \overrightarrow{u})$ dans chacun des cas suivants.

1. $A(2, 1, -4)$ et $\overrightarrow{u}(2, 1, 0)$;
2. $A(0, 0, 1)$ et $\overrightarrow{u}(-2, -2, 1)$;
3. $A(1, 1, 1)$ et $\overrightarrow{u}(4, 0, 8)$;
4. $A(2, -1, -1)$ et $\overrightarrow{u}(7, -3, -4)$;
5. $A(-2, 1, -4)$ et $\overrightarrow{u}(5, 5, 5)$;
6. $A(2, 0, \sqrt{2})$ et $\overrightarrow{u}(1, 2, 1)$.

Définition : Représentation paramétrique d'un plan

L'espace est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $(\mathscr{P})$ la plan passant par le point $A(x_0, y_0, z_0)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$. On dit que le système

$$\begin{cases} x &= x_0 + at + a'k \\ y &= y_0 + bt + b'k \; ((t,k) \in \mathbb{R}^2) \\ z &= z_0 + ct + c'k \end{cases}$$

est une représentation paramétrique du plan $(\mathscr{P})$.

Exemple
Exercices 2.d, 2.e, 2.f
Page 155
CIAM 1ère C

Exercice 2

L'espace est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Déterminer une représentation paramétrique du plan $(\mathscr{P})$ passant par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$ dans chacun des cas suivants.
   - $A(2,1,1)$ et $\vec{n}(4,3,2)$;
   - $A(-3,4,1)$ et $\vec{n}(1,1,1)$;
   - $A(0,0,1)$ et $\vec{n}(7,-3,-4)$.
2. Déterminer une représentation paramétrique du plan $(\mathscr{P})$ de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ dans chacun des cas suivants.
   - $A(-1,1,1)$, $\vec{u}(1,0,1)$ et $\vec{v}(2,1,0)$;
   - $A(0,3,-3)$, $\vec{u}(2,3,1)$ et $\vec{v}(2,7,1)$;
   - $A(2,0,3)$, $\vec{u}(4,1,3)$ et $\vec{v}(-2,-2,1)$.

Exercice 3

On munit l'espace du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $B(2,2,-1)$, $C(0,1,4)$ et $D(-1,2,4)$.

1. Démontrer que les vecteurs $\vec{u}(2,-1,1)$, $\vec{v}(3,5,7)$ et $\vec{w}(-2,1,3)$ sont non coplanaires.
2. Déterminer les coordonnées du point A vérifiant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.
3. Placer les points A, B, C et D.

4. On désigne par G le point de l'espace vérifiant $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$. Trouver les coordonnées de G.
5. a. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
   b. Déterminer représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$ passant par A et perpendiculaire au plan (BCD).
   c. En déduire le projeté orthogonal H du point A sur le plan (BCD).
   d. Déterminer $d(A,(BCD))$.
6. Les points A, G et H sont-ils alignés ?

Propriété 5: Distance d'un point à un plan

Soit $(\mathscr{P})$ le plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ et $M(x_0,y_0,z_0)$. On a :

$$d(M,(\mathscr{P}))=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Exemple

L'espace est muni d'un repère orthonormé.
Soit $(\mathscr{P})$ le plan d'équation $\sqrt{3}x+2\sqrt{3}-\sqrt{6}z=0$ et $A(7,3,-7)$ un point de l'espace. Calculer $d(A,(\mathscr{P}))$.

3. Positions relatives de droites et plans

Propriété 6

Soient $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ deux droites de repère $(A,\overrightarrow{u})$ et $(B,\overrightarrow{v})$. Soient $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$.

- $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont coplanaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires.
- $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont sécantes si et seulement si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non colinéaires.
- $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
- $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont orthogonales si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.
- $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.
- $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires.
- $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires.
- $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux.

Exemple

Exercices 3.a, 3.b, 3.c, 3.d, 3.e
Page 160
CIAM 1ère SM

Exercice 1

On munit l'espace du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère le plan d'équation $(\mathscr{P})$ cartésienne $2x - 3y + 2z - 7 = 0$ et la droite $(\mathscr{D})$ dont représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x &= 2+3t \\ y &= -1+t \ (t \in \mathbb{R}) \ . \\ z &= 3+2t \end{cases}$$

1. Déterminer un système d'équations cartésiennes de $(\mathscr{D})$.
2. Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite $(\mathscr{D}')$ passant par le point $A(1,1,1)$ et parallèle à la droite $(\mathscr{D})$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D}'')$ perpendiculaire à $(\mathscr{P})$ au point $B(0,0,6)$. En déduire le projeté orthogonal B' du point B sur le plan $(\mathscr{P})$.
4. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P}')$ passant par le point $C(2,0,3)$ et perpendiculaire au plan $(\mathscr{P})$. En déduire une représentation paramétrique de la droite d'intersection des plans $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$.
5. Donner la position relative de la droite $(\mathscr{D})$ et du plan $(\mathscr{P})$.
6. Les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}'')$ sont t-elles sécantes ? Si oui, déterminer leur point d'intersection.

Exercices

Exercices 5, 6, 7, 20, 31, 33, 34, 39
Pages 161-164
CIAM 1ère SM

Situation d'apprentissage 2

Organisation des données

Séquence 1 Équations, Inéquations, Système d'équations linéaires

1. Équations du second degré dans $\mathbb{R}$

Définition

On appelle équation du second degré dans $\mathbb{R}$ toute équation de la forme ax^2+bx+c, où x est l'inconnue réelle a, b, c des nombres réels avec $a \neq 0$.

Propriété 1

Soit l'équation $ax^2+bx+c, (a \neq 0)$. On pose $\Delta = b^2-4ac$. On a :
- Si $\Delta > 0$, alors léquation admet deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2 avec $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ avec $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution unique x_0 avec $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'admet pas de solution.

Exemple
Exercice 1.a
Page 190
CIAM 1ère SM

Propriété 2: Factorisation d'un polynôme du second degré

Soit $\mathrm{P}(x) = ax^2+bx+c$ un polynôme du second degré.
- Si $ax^2+bx+c=0$, admet 2 solution distinctes x_1 et x_2, alors $\mathrm{P}(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$
- Si $ax^2+bx+c=0$ admet une solution unique x_0, alors $\mathrm{P}(x) = a(x-x_0)^2$
- Si $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solution, alors $\mathrm{P}(x)$ ne peut être mis sous forme de produit de facteurs de premier degré.

Exemple
Exercice 3
Page 200
CIAM 1ère SM

Propriété 3: Somme et produit des solutions

Si x_1 et x_2 désignent les solutions éventuelles d'une équation du second degré $ax^2+bx+c=0$, alors $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ et $x_1.x_2=\frac{c}{a}$.

Exemple

Soit P le polynôme défini par : $\mathrm{P}(x)=x^2-3x+2$. Il admet deux racines distinctes dont l'une est 1. Déterminer la seconde racine.

Propriété 4: Détermination de 2 nombres connaissant leur somme et leur produit

Deux nombres réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si ils sont les solutions de l'équation : $x^2-\mathrm{S}x+\mathrm{P}=0$.

Exemple

Déterminer les dimensions d'un rectangle dont le périmètre est 16 m et l'aire 14 m.

Exercice 1

Soit P le polynôme défini par :

$$\mathrm{P}(x)=x^4-(6+\sqrt{7})x^3+(6\sqrt{7}-15)x^2+(15\sqrt{7}-8)x+8\sqrt{7}.$$

1. a. Vérifier que $\mathrm{P}(\sqrt{7})=0$. Que peux-t-on conclure ?

   b. Déterminer un polynôme Q tel que, pour tout nombre réel x, on ait :

   $$\mathrm{P}(x)=(x-\sqrt{7})\mathrm{Q}(x).$$

   On précisera le degré de Q et on utiliseras la méthode des coefficients indéterminés.

2. a. Justifier que -1 est une racine de $\mathrm{Q}(x)$.

   b. Trouver un polynôme R du second degré tel que : $\mathrm{Q}(x)=(x+1)\mathrm{R}(x)$.

   On utilisera la méthode de la division euclidienne.

   c. Factoriser le polynôme R puis écrire $\mathrm{P}(x)$ sous la forme de produits facteurs premiers.

2. Inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$

Définition

On appelle **inéquation du second degré** toute inéquation pouvant se ramener sous l'une des forme suivante $\mathrm{P}(x)<0$, $\mathrm{P}(x)>0$, $\mathrm{P}(x)\neq 0$ et $\mathrm{P}(x)\geq 0$ où P est un polynôme du second degré.

Propriété 5: Signe d'un polynôme du premier degré

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$. Alors le tableau de signe du polynôme $ax+b$ est le suivant.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		signe de $-a$	0	signe de a	

Exemple

Factoriser le polynôme $-2x^2+3x-1$ puis étudier son signe.

Propriété 6: Signe d'un polynôme du second degré

Soit P le polynôme défini : $P(x) = ax^2+bx+c = 0, (a \neq 0)$ et Δ le discriminant de l'équation $P(x) = 0$.

• Si $\Delta < 0$, alors le tableau de signes du polynôme $P(x)$ est le suivant.

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	

• Si $\Delta = 0$, alors l'équation $P(x) = 0$ admet une solution unique x_0 et le tableau de signes du polynôme $P(x)$ est le suivant.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de a	

• Si $\Delta > 0$, alors l'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 $(x_1 < x_2)$ et le tableau de signes du polynôme $P(x)$ est donné par le tableau suivant.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Exemple

Exercice 7

Page 200
CIAM 1ère SM

Méthode.
Pour résoudre une inéquation du second degré, il suffit d'étudier le signe du polynôme du second degré qui est associés et d'en déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Exemple
Résoudre l'inéquation $4x^2 - 12x + 9 > -2x^2 - 3$ dans $\mathbb{R}$.

3. Position relative des racines d'un polynôme du second degré et d'un réel

Propriété 7: Etude du signe des racines d'un polynôme du second degré

Soit $\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$ avec $(a \neq 0)$ un polynôme du second degré admettant deux racines x_1 et x_2 telle que $x_1 < x_2$.
Désignons par P le produit des racines et par S leur somme.
•Si $\mathrm{P} < 0$ et $\mathrm{S} < 0$ alors $x_1 < 0 < x_2$ et $|x_1| > x_2$.
•Si $\mathrm{P} < 0$ et $\mathrm{S} \geq 0$ alors $x_1 < 0 < x_2$ et $|x_1| \geq x_2$.
•Si $\mathrm{P} = 0$ et $\mathrm{S} < 0$ alors $x_1 < 0 = x_2$.
•Si $\mathrm{P} = 0$ et $\mathrm{S} > 0$ alors $x_1 = 0 < x_2$.
•Si $\mathrm{P} > 0$ et $\mathrm{S} < 0$ alors $x_1 < x_2 < 0$.
•Si $\mathrm{P} > 0$ et $\mathrm{S} > 0$ alors $0 < x_1 < x_2$.

Exemple
Exercice 20
Page 200
CIAM 1ère SM
Résolution
$\mathrm{P}(x) = x^2 + 2(m-1)x + m - 3$
P est un polynôme du second degré.
Soit Δ le discriminant de l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$. On a : $\Delta = 4(m^2 - 3m + 4)$.
Soit δ le discriminant de l'équation $m^2 - 3m + 4 = 0$. On a : $\delta = -7$ et $\delta < 0$. Donc $\Delta > 0$ et ainsi P admet deux racines distinctes x_1 et x_2 pour toutes les valeurs de m.
Soient P et S le produit et la somme respectifs de x_1 et x_2 telles que $x_1 < x_2$. On a : $\mathrm{P} = -2(m-1)$ et $\mathrm{S} = m - 3$.
Tableau de signes de P et S

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
P		$-$	0	$+$		$+$	
S		$-$		$-$	0	$+$	

On a :
•Si $m \in]-\infty, 1[$, alors $P < 0$ et $S < 0$ et ainsi on a : $x_1 < 0 < x_2$.
•Si $m \in]1, 3[$, alors $P > 0$ et $S < 0$ et ainsi on a : $x_1 < x_2 < 0$.
•Si $m \in]3, +\infty[$, alors $P > 0$ et $S > 0$ et ainsi on a : $0 < x_1 < x_2$.
•Si $m = 1$, alors $P = 0$ et $S = -2$ et ainsi on a : $x_1 < 0 = x_2$.

Exercice 1

On considère l'équation suivante :

$$(E_m) : (2m+3)x^2 + 4mx + m + 1 = 0, \text{ où } m \in \mathbb{R}.$$

1. Résoudre, suivant les valeurs de m, l'équation (E_m).
2. On suppose que (E_m) admet deux solutions distinctes.
   a. Déterminer le produit P et la somme S de ces solutions.
   b. Etudier le signe de P et de S.
3. Etudier, suivant les valeurs de m, le signe des solutions de (E_m) dans les cas où elle en possède.

Propriété 8: Position des racines d'un polynôme du second degré par rapport à un nombre réel α

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $(a \neq 0)$ un polynôme du second degré et α un nombre réel.
•Si $aP(\alpha) < 0$, alors P possède deux zéros x_1 et x_2 tel que $x_1 < \alpha < x_2$.
•Si $aP(\alpha) \geq 0$ et P possède deux racines x_1 et x_2,
–si $\alpha < -\frac{b}{2a}$, alors $\alpha < x_1 < x_2$;
–si $\alpha > -\frac{b}{2a}$, alors $x_1 \leq x_2 < \alpha$.

4. Équations et inéquations irrationnelles

Définition

On appelle **équation** (resp. **inéquation**) **irrationnelle** toute équation (resp. inéquation) où l'inconnue figure sous un radical.

Exemple

Soient P et Q deux fonctions polynômes telles que $d^\circ(\mathrm{P}) = 2$ et $d^\circ(\mathrm{Q}) = 1$.

- Les équations $\sqrt{\mathrm{P}(x)} = \mathrm{Q}(x)$ et $\sqrt{\mathrm{P}(x)} = \sqrt{\mathrm{Q}(x)}$ sont des équations irrationnelles.
- Les inéquations $\sqrt{\mathrm{P}(x)} \leq \mathrm{Q}(x)$, $\sqrt{\mathrm{P}(x)} \geq \mathrm{Q}(x)$ et $\sqrt{\mathrm{P}(x)} \geq \sqrt{\mathrm{Q}(x)}$ sont des inéquations irrationnelles.

Propriété 9

Soient P et Q deux fonctions polynômes telles que $\mathrm{d}^\circ(\mathrm{P}) = 2$ et $\mathrm{d}^\circ(\mathrm{Q}) = 1$.

- $\sqrt{\mathrm{P}(x)} = \mathrm{Q}(x) \iff \begin{cases} \mathrm{Q}(x) & \geq 0 \\ \mathrm{P}(x) & = [\mathrm{Q}(x)]^2 \end{cases}$
- $\sqrt{\mathrm{P}(x)} = \sqrt{\mathrm{Q}(x)} \iff \begin{cases} \mathrm{P}(x) & \geq 0 \\ \mathrm{Q}(x) & \geq 0 \\ \mathrm{P}(x) & = \mathrm{Q}(x) \end{cases}$

Exemple

Exercice 25
Page 201
CIAM 1ère SM

Propriété 10

Soient P et Q deux fonctions numériques d'une variable réelle.

- $\sqrt{\mathrm{P}(x)} \leq \mathrm{Q}(x) \iff \begin{cases} \mathrm{P}(x) & \geq 0 \\ \mathrm{Q}(x) & \geq 0 \\ \mathrm{P}(x) & \leq [\mathrm{Q}(x)]^2 \end{cases}$
- $\sqrt{\mathrm{P}(x)} \geq \mathrm{Q}(x) \iff \begin{cases} \mathrm{Q}(x) & \leq 0 \\ \mathrm{P}(x) & \geq 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \mathrm{P}(x) & \geq 0 \\ \mathrm{P}(x) & \leq [\mathrm{Q}(x)]^2 \end{cases}$
- $\sqrt{\mathrm{P}(x)} \leq \sqrt{\mathrm{Q}(x)} \iff \begin{cases} \mathrm{P}(x) & \geq 0 \\ \mathrm{Q}(x) & \geq 0 \\ \mathrm{P}(x) & \leq \mathrm{Q}(x) \end{cases}$

Exemple

Exercice 29
Page 201
CIAM 1ère SM

Exercice 1

Soit a et b deux nombres réels tels que $a > \frac{1}{3}$ et $b < 0$. Résoudre, suivant les valeurs des paramètres réels a et b, l'équation $\sqrt{ax^2+2x+3} - bx = 0$.

5. Systèmes d'équations linéaires

5.1. Systèmes d'équations

Définition

- On appelle système de 3 équations linéaire à 3 inconnues, tout système de la forme

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$$

où $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', d, d', d''$ sont des nombres réels et x, y, z sont les inconnues.
- On appelle solution d'un tel système, tout triplet (x_0, y_0, z_0) vérifiant simultanément les équations qui les composent.
- Résoudre un système d'équations linéaires, c'est trouver toutes les solutions de ce système.
- Deux systèmes S_1 et S_2 d'équations linéaires sont dits équivalents lorsqu'ils possèdent le même ensemble des solutions. On note $S_1 \iff S_2$.

Méthode du pivot de Gauss.

Pour résoudre un système de p équations $L_1, L_2, \ldots, L_p$ de n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on transforme le système en un système triangulaire équivalent.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 & + \cdots + a_{n1}x_n & = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 & + \cdots + a_{n2}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1p}x_1 + a_{2p}x_2 & + \cdots + a_{np}x_n & = b_p \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 & + \cdots + \alpha_{n1}x_n & = \beta_1 \\ \alpha_{22}x_2 & + \cdots + \alpha_{n2}x_n & = \beta_2 \\ & \ddots & \vdots \\ & \alpha_{np}x_n & = \beta_p \end{cases}$$

Pour ce faire, choisir une équation dont le coefficient de la première inconnue est différent de 0 et éliminer cette inconnue dans les $(p-1)$ autres équations et procéder de la même manière jusqu'à l'obtention du système échelonné.
Les opérations élémentaires suivantes sont permises pour obtenir un système équivalent au système initial.

- On peut permuter deux équations L_i et L_j $(i \neq j)$. On note $L_i \leftrightarrow L_j$.
- On peut remplacer une équation L_i par αL_i $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$. On note $L_i \leftarrow \alpha L_j)$.
- On peut remplacer une équation L_i par une combinaison linéaire de L_i et d'une autre équation L_j. On note $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$ $(\alpha \neq \beta)$.

6. Programmation linéaire

Un problème de programmation linéaire consiste à déterminer les coordonnées (x, y) d'un ou plusieurs points d'une partie du plan définie par un système d'équations ou inéquations traduisent un ensemble de contraintes. Ces contraintes étant réalisées, on peut rechercher, parmi ces points, ceux dont les coordonnées rendent maximale ou minimale une expression de la forme $ax + by$.

Exemple

Activité 59(56 , PM)

Exercices

Exercices 1.a, 1.c, 1.d, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 19, 20, 21, 22, 23, 25-29, 33, 36
Pages 190, 200, 201, 202
CIAM 1ère SM

Séquence 2 Statistique

La statistique est la science qui a pour objet le regroupement méthodique des faits qui se prêtent à une évaluation numérique.

Définition

1. Un **individu** est toute réalité (physique ou non) possédant un aspect particulier ou une caractéristique particulière faisant l'objet d'une étude statistique.
2. Un **caractère** est tout aspect particulier ou caractéristique particulière qui fait l'intérêt d'une série d'observations statistiques.
3. Une **modalité** d'un caractère est une valeur possible que peut prendre ce caractère.
4. Une **variable statistique** peut être définie comme une caractéristique pouvant prendre une ou plusieurs valeurs d'un ensemble d'observations possibles auquel une mesure ou une qualité peut être appliquée.

Remarque

Un caractère peut être qualitatif (lorsque ses modalités sont libellés et donc ne sont pas quantifiables) ou quantitatif (les modalités sont quantifiables et sont représentées par des nombres ou des intervalles de nombres).

1. Série statistique groupée à une variable

On appelle série statistique à un caractère toute suite de résultats de l'observation des manifestations d'une seule caractéristique d'un phénomène faisant l'objet d'une étude statistique. La série est dite regroupé si le caractère étudié est quantitatif et les modalités sont des intervalles.

Définition

Considérons une série statistique graduée résumé dans le tableau suivant :

Classes x_i	$[a_0, a_1[$	$[a_1, a_2[$	$\dots$	$[a_i, a_{i+1}[$	$\dots$	$[a_{p-1}, a_p[$
Effectifs n_i	n_0	n_1	$\dots$	n_i	$\dots$	n_{p-1}

•L'effectif total de la population n est:

$$n = n_0 + n_1 + \cdots + x_{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} n_i$$

•La fréquence f_i d'une classe $[a_i, a_{i+1}[$ d'effectif n_i est donné par : $f_i = \frac{n_i}{n}$ ou $f_i = \frac{n_i \times 100}{n}\%$.
•Le centre c_i d'une classe $[a_i, a_{i+1}[$ est $c_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$.
•L'amplitude α_i d'une classe $[a_i, a_{i+1}[$ est $\alpha_i = |a_i - a_{i+1}| = a_{i+1} - a_i$.
•La densité d_i d'une classe $[a_i, a_{i+1}[$ d'effectif n_i est : $d_i = \frac{n_i}{\alpha_i}$ où α_i est l'amplitude de la classe.

Exemple 1.1
Une étude statistique a permis de relever les données suivants.

164	180	168	165	177	166	165	171	168	173
185	181	185	173	173	180	173	176	166	180
169	160	184	162	178	179	182	168	160	162
162	164	184	170	171	175	176	176	160	184
164	161	182	165	174	169	161	161	160	167
184	171	169	184	173	163	177	170	174	177

On regroupe les données de cette série en huit classes d'amplitude distinctes. Reproduire et compléter le tableau statistique suivant.

Classes x_i	$[160, 163[$	$[163, 167[$	$[167, 170[$	$[170, 175[$	$[175, 178[$	$[178, 180[$	$[180, 183[$	$[183, 186[$	Totaux
Effectifs n_i									
Fréquences f_i									
Centres c_i									
Amplitudes α_i									
Densités d_i									

Résolution

Classes x_i	$[160,163[$	$[163,167[$	$[167,170[$	$[170,175[$	$[175,178[$	$[178,180[$	$[180,183[$	$[183,186[$
Hauteur corrigées $h_i = 2d_i$	$6,66$	$4,5$	$4,66$	$5,2$	4	2	4	$4,66$

Table 2.1: Tableau des hauteurs corrigées

Classes x_i	$[160,163[$	$[163,167[$	$[167,170[$	$[170,175[$	$[175,178[$	$[178,180[$	$[180,183[$	$[183,186[$	Totaux
Effectifs n_i	10	9	7	13	6	2	6	7	60
Fréquences f_i (en %)	$16,67$	15	$11,67$	$21,67$	10	$3,33$	10	$11,67$	100
Centres c_i	$161,5$	165	$168,5$	$172,5$	$175,5$	179	$181,5$	$185,5$	
Amplitudes α_i	3	4	3	5	3	2	3	3	
Densités d_i	$3,33$	$2,25$	$2,33$	$2,6$	2	1	2	$2,33$	

Définition : Classe modale et mode

- On appelle classe modale, d'une série statistique continue, toute classe d'effectif maximal.
- On appelle mode, d'une série statistique continue, le centre d'une classe modale.

Exemple

1. Construire l'histogramme de fréquences de la série de l'exemple 1.1.
2. Quels sont la classe modale et le mode de la série de l'exemple 1.1 ?

Résolution

1. Construisons l'histogramme des fréquences de la série.
   Comme les classes de la série n'ont pas la même amplitude, il faut corriger les hauteurs de la bande rectangulaire. Pour la classe $[b_i, b_{i+1}[$, la hauteur corrigée est $h_i = \alpha d_i$ où α désigne la plus petite amplitude et d_i la densité de la classe $[b_i, b_{i+1}[$. Le tableau 1 donne la hauteur corrigée de chaque classe.

2. La classe modale est $[170,175[$ et le mode est $172,5$.

Définition : Effectifs cumulés et fréquences cumulées

Soit x une modalité d'un caractère quantitatif.

- On appelle effectif cumulé croissant de x, l'effectif de la classe $]-\infty, x]$.
- On appelle effectif cumulé décroissant de x l'effectif de la classe $[x, +\infty[$,c'est-à-dire le nombre d'individus ayant une modalité supérieur ou égale à x.

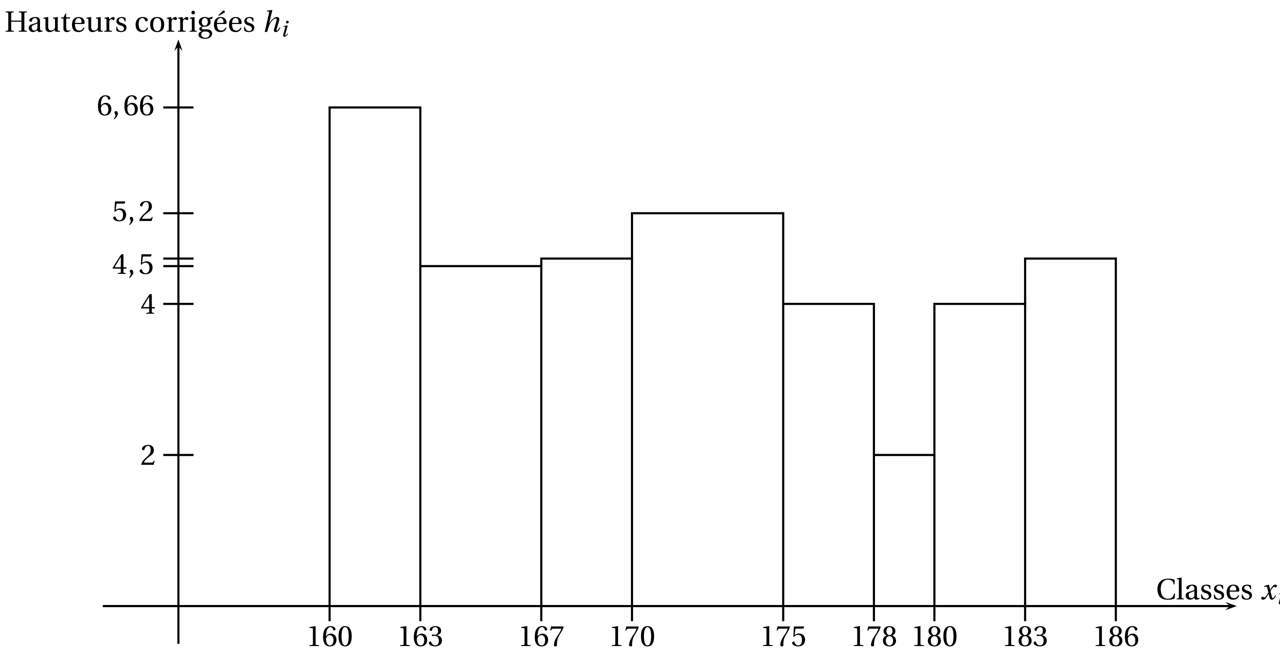


Figure 2.1: Histogramme des fréquences de la série de l'exemple 1.1

Exemple

Construire le tableau statistique de la série de l'exemple 1.1 avec les fréquences et effectifs cumulés.

Résolution

Voir table 1. à la page 37.

Définition : Moyenne d'une série statistique

- Soit $(x_i, n_i)_{1\leq i\leq p}$ une série statistique quantitative discrète. On appelle moyenne (arithmétique) de cette série le nombre noté bar$x$ et défini par :

$$\text{bar}x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i.$$

- Soit $(x_i, n_i)_{1\leq i\leq p}$ une série statistique quantitative continue. On appelle moyenne (arithmétique) de cette série la moyenne de la série (c_i, n_i) où c_i est le centre de la classe x_i.

Exemple

Classes x_i	$[160, 163[$	$[163, 167[$	$[167, 170[$	$[170, 175[$	$[175, 178[$	$[178, 180[$	$[180, 183[$	$[183, 186[$	Totaux
Effectifs n_i	10	9	7	13	6	2	6	7	60
Effectifs cumulés croissants	10	19	26	39	45	47	53	60	
Effectifs cumulés décroissants	60	50	41	34	21	15	13	7	
Fréquences f_i (en %)	16,67	15	11,67	21,67	10	3,33	10	11,67	100
Fréquences cumulées croissantes	16,67	31,67	43,34	65,01	75,01	78,34	88,34	100	
Fréquences cumulées décroissantes	100	83,34	68,34	56,67	35	25	21,67	11.67	

Table 2.2: Tableau statistique avec les effectifs et fréquences cumulés

Déterminer la moyenne de la série de l'exemple 1.1.

Résolution

$\text{bar}x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i c_i$

$\text{bar}x = \frac{1}{60}(10\times161,5+9\times165+7\times168,5+13\times172,5+6\times175,5+2\times179+6\times181,5+7\times185,5) = 172,01$

Définition : Médiane

On appelle médiane d'une série de variable X, la valeur M_e de la variable X pour laquelle 50% au moins des individus ont une valeur de modalité inférieure ou égale à M_e et 50% au moins des individus ont une valeur modalité supérieure ou égale à M_e.

Méthode de détermination de la médiane par calcul.

1er cas : Série statistique discrète

On classe par ordre croissant toutes les n modalités avec répétition, c'est-à-dire : $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ et ensuite la médiane s'obtient avec l'une des formules suivantes.

$$M_e = \begin{cases} \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ x_{\frac{n+1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Deuxième cas : Série statistique continue

On détermine d'abord la classe médiane qui correspond à la classe dont l'effectif cumulé croissant est supérieur ou égal à $\frac{n}{2}$ et l'effectif cumulé croissant de la classe qui le précède est inférieur ou égal à $\frac{n}{2}$; et on détermine la médiane en faisant une interpolation linéaire.

On désigne par $[b_i, b_{i+1}[$ la classe médiane. Soit n_i l'effectif cumulé croissant de la classe $[b_{i-1}, b_i[$ et n_{i+1} l'effectif cumulé croissant de la classe $[b_i, b_{i+1}[$. On a : $b_i \leq \mathrm{M}_e \leq b_{i+1}$ et $n_i \leq \frac{n}{2} \leq n_{i+1}$ et :

$$\frac{n_{i+1} - n_i}{b_{i+1} - b_i} = \frac{\frac{n}{2} - n_i}{\mathrm{M}_e - b_i} \Rightarrow \mathrm{M}_e = b_i + (b_{i+i} - b_i)\frac{\frac{n}{2} - n_i}{n_{i+1} - n_i}.$$

Méthode de détermination graphique de la médiane.

Graphiquement la médiane est l'abscisse :

• du point d'intersection des courbes des effectifs cumulés (ou fréquences cumulées).

• du point de l'une des deux courbes des effectifs cumulés (resp. fréquences cumulées) ayant pour ordonnée $\frac{\mathrm{N}}{2}$ (resp. $0,5$) avec N l'effectif total de la série.

Exemple

1. Construire les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.
2. Déterminer la classe médiane et la médiane de la série statistique de l'exemple 1.1.

Résolution

1. Voir figure 1. à la page 38.
2. Graphiquement, la médiane de la série vaut : $\mathrm{M}_e = 171,5$.
   Les effectifs cumulés croissants des classes $[167, 170[$ et $[170, 175[$ sont 26 et 39 respectivement. On a : $26 < 30 < 39$. Donc la classe médiane $[170, 175[$.

$$\frac{\mathrm{M}_e - 170}{30 - 26} = \frac{175 - 170}{39 - 26} \Rightarrow \mathrm{M}_e = 170 + (175 - 170)\frac{30 - 26}{39 - 26}$$

$$\Rightarrow \mathrm{M}_e = 171,54$$

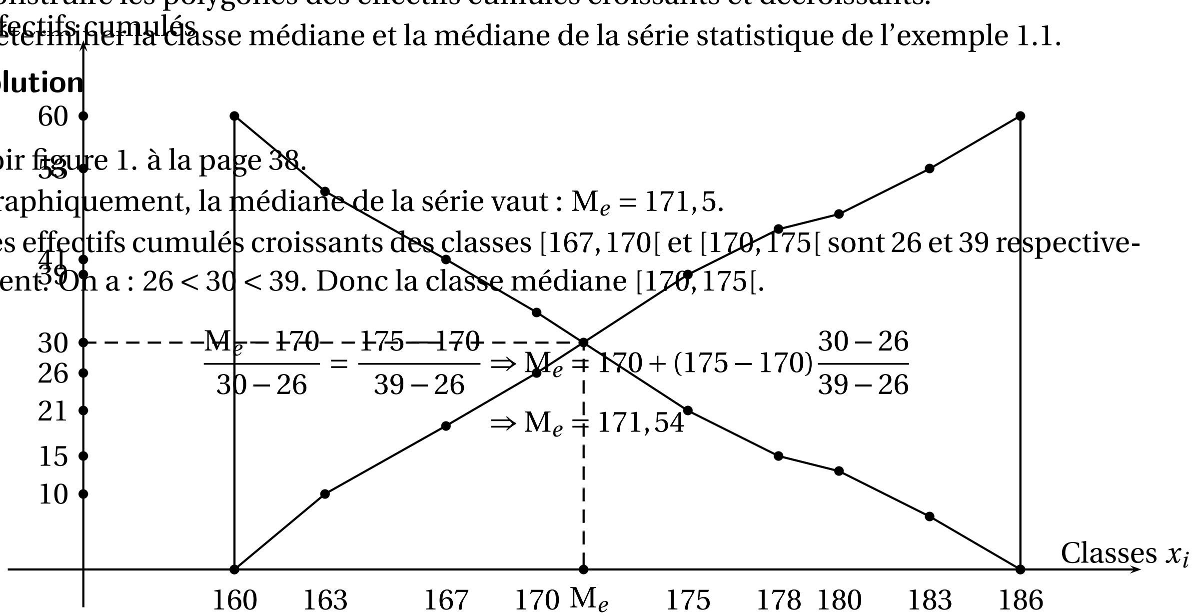


Figure 2.2: Polygones des effectifs cumulés

Définition : Variance et écart type

1. Soit $(x_i, n_i)_{1\leq i\leq p}$ une série statistique quantitative discrète.
   - On appelle **variance** de cette série est le nombre réel positif noté V(X) et définie par :

   $$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \text{bar}x)^2.$$

   On montre que :

   $$V(X) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2\right) - \text{bar}x^2.$$

   - On appelle **écart-type** de cette série statistique le nombre noté $\sigma(X)$ et définie par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
2. Soit $(x_i, n_i)_{1\leq i\leq p}$ une série statistique quantitative continue. On appelle variance et écart-type de cette série les variances et écart-type de la série discrète $(c_i, n_i)_{1\leq i\leq p}$ où c_i est le centre de la classe x_i.

Exemple
Déterminer l'écart-type de la série statistique de l'exemple 1.1.
Résolution

Soit V la variance de la série de l'exemple 1.1.
$V = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i c_i^2\right) - \text{bar}x^2 = 59,78$
L'écart-type de cette série est $\sigma = \sqrt{V} = 7,73$.

2. Série statistique à deux variables

Lorsqu'on étudie chez une population donnée deux caractères quantitatifs X et Y simultanément, on dit que l'on est en présence d'une série statistique à deux variables ou d'une série statistique double (X, Y). Les données (observations) peuvent être présentées dans un tableau celui-ci.

Valeurs de X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
Valeurs de Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_i	$\cdots$	y_p

Pour un couple de modalité (x_i, y_i), le nombre d'individu ayant ce couple est l'effectif de ce couple de modalité. Les données peuvent être aussi organisées dans un tableau à double entrée comme celui-ci.

y_j \ x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_1	n_{11}	n_{12}	$\cdots$	n_{1n}
y_2	n_{21}	n_{22}	$\cdots$	n_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_p	n_{p1}	n_{p2}	$\cdots$	n_{pn}

Exemple 2.2

Après le premier devoir du premier trimestre dans une école privé, le professeur de mathématiques d'une classe de 1ère C s'intéresse aux notes sur 100 obtenues par seize élèves de sa classe en mathématiques (X) et en PCT (Y). L'un de ses élèves Codjo ne se rappelant plus ça note en mathématiques, il a pu relever celles des autres élèves dans le tableau suivant.

x_i	23	30	34	40	45	51	60	65	69	75	80	86	90	94	98
y_i	17	22	28	31	35	41	50	57	62	66	73	77	81	88	94

Reproduire le tableau a double-entrée associé à cette série double.

Définition : Nuage de points

Le nuage de point d'une série double (X, Y) est l'ensemble des points de $\mathrm{M}_{ij}(x_i, y_i)$ représentés dans un repère orthogonal.

Exemple

Dans un repère orthogonal, représenter le nuage de points de la série statistique de l'exemple 2.2.

Définition : Séries statistiques marginales

L'ensemble des données concernant une seule variable X ou Y des variables d'une série statistique est appelé **série marginale** (de X ou de Y).

Exemple

Reproduire le tableau statistique pour chacune des séries marginales de la série statistique de l'exemple 2.2.

Définition : Point moyen

On appelle point moyen d'un nuage de points $\mathrm{M}_{ij}(x_i, y_j)$ $(1 \leq i \geq n, 1 \leq j \geq p)$ le point G(bar$x$, bar$y$), où bar$x$ est la moyenne de X et bar$y$ est la moyenne de Y.

Exemple

Déterminer le point moyen de la série statistique de l'exemple 2.2.

Définition : Covariance

On appelle **covariance** d'une série statistique double (X, Y) d'effectif total N le nombre noté $\text{cov}(X, Y)$ et défini par :

$$\text{cov}(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} n_{ij}(x_i - \text{bar}x)(y_j - \text{bar}y).$$

On montre que :

$$\begin{aligned}
\text{cov}(X,Y) &= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} n_{ij}x_i y_j\right) - \text{bar}x\text{bar}y \\
\text{cov}(X,Y) &= x_1\sum_{j=0}^{p} n_{1j}y_j + \cdots + x_i\sum_{j=0}^{p} n_{ij}y_j + \cdots + x_n\sum_{j=0}^{p} n_{nj}y_j - \text{bar}x\text{bar}y \quad . \\
\text{cov}(X,Y) &= x_1(n_{11}y_1 + n_{12}y_2 + \cdots + n_{1p}y_p) + x_2(n_{21}y_1 + n_{22}y_2 + \cdots + n_{2p}y_p) \\
&\quad + \cdots + x_n(n_{n1}y_1 + n_{n2}y_2 + \cdots + n_{np}y_p)
\end{aligned}$$

Exemple

Calculer la covariance de la série statistique de l'exemple 2.2.

2.1. Régression

Définition : Ajustement linéaire d'un nuage de point

Effectuer une ajustement linéaire d'un nuage de points, c'est le substituer par une droite qui passe le plus près possible des points du nuage. Les méthodes des points moyens de Mayer et des moindres carrés ordinaires sont deux méthodes qui permettent de trouver une telle droite.

Méthode des points moyens de Mayer.

1. Ordonner les points du nuage en ordre croissant des x_i, puis les séparer en deux groupes ayant le même nombre de points. Si le nombre de points est impair, le point central doit être placé dans les deux sous-groupes ;
2. Calculer la moyenne de X et celle de Y pour chaque sous groupe de points, soit G_1 et G_2 les points moyens des deux sous groupes.

La droite (G_1G_2) est appelé **droite de Mayer**.

Méthode des moindres carrés.

On distingue la droite de régression de Y en X et la droite de régression de X en Y.

•L'équation de la droite de régression de Y en X est : $y = ax + b$ avec

$$a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)} \text{ et } b = \text{bar}y - a\text{bar}x.$$

•L'équation de la droite régression de X en Y est : $x = a'y + b'$ avec

$$a' = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(Y)} \text{ et } b' = \text{bar}x - a'\text{bar}y.$$

Définition : Coefficient de corrélation linéaire

On appelle coefficient de corrélation linéaire de (X,Y) le nombre réel r tel que :

$$r = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Remarque

On a : $-1 \leq r \leq 1$.

Exemple

Calculer le coefficient de réduction de la la série statistique de l'exemple 2.2.

Propriété 1

Soit r le coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double (X,Y).

•Si $|r| = 1$, alors tous les points du nuages sont alignés. Les résultats ou prévisions sont fiables.

•$0,87 \leq |r| < 1$, alors on dit qu'il y a une forte corrélation linéaire entre X et Y. Les résultats sont fiables.

•Si $|r| < 0,87$, alors on dit que la liaison entre (X,Y) est lâche. Les résultats ne sont pas fiables.

•Si $|r|$ est très proche de 0, alors qu'il y a une indépendance des variables X et Y.

Exemple

1. Est-ce qu'un ajustement linéaire, pour la série statistique de l'exemple 2.2, de la note en mathématiques et celle de PCT est justifié ? Si oui, donner l'équation de Y en fonction de X par la méthode des moindres carrées.
2. Pourrait-on prédire la note en mathématiques de Codjo sachant que sa note en PCT est 72 ? Si oui, combien a-t-il ?

Exercices

Exercice 1

Après une série de devoir surveillé on a relevé les notes de mathématiques de 15 élèves dune classe de terminale D. Ces notes sont les suivantes :

8	17	14	14	17
14	8	14	14	9
9	9	10	9	9

1. Etablir le tableau des effectifs et des fréquences cumulées de cette série statistique.
2. Construire le diagramme des fréquences cumulées de cette série.
3. Combien d'élèves ont moins de 14 ?
4. Quels sont le mode et la médiane de cette série.
5. Calculer la moyenne, la variance et l'écart-type de cette série.

Exercice 2

On considère une série statistique dont les effectifs sont données dans le tableau suivant :

Classe	$[0,4[$	$[4,6[$	$[6,8[$	$[8,10[$
Effectif	15	21	18	6

1. Représenter le tableau statistique avec les effectifs et fréquences cumulés.
2. Déterminer le mode cette série.
3. Construire l'histogramme des effectifs.
4. a. Construire le polygone des effectifs cumulées croissantes.
   b. Déterminer la médiane de cette série graphiquement puis par calcul.
   c. Quel est le nombre d'individus dont la modalité est inférieure à 5.
5. Calculer la moyenne de cette série.
6. Déterminer la variance et l'écart-type de cette série.

Exercice 3

Dans une maternité, on a relevé, pour chacune des vingt naissances d'une journée, l'âge x (en années) de la mère et le poids y (en kilogrammes) du nouveau-né. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

x	22	18	20	20	16	22	26	22	18	22	18	26	20	26	18	18	22	26	22	20
y	3,2	2,8	3,2	3,6	2,8	2,8	3	2,8	3	3	3,4	3,6	3,2	3	3	3,4	2,8	2,6	3	3,2

1. Présenter ces données dans un tableau à double entrée.
2. Déterminer les séries marginales associées aux caractères x et y.
3. Représenter par des taches le nuage de points associé à cette série double.
4. Déterminer le point moyen de cette série double.
5. Déterminer, par la méthode de Mayer, l'équation de la droite d'ajustement linéaire. Tracer cette droite.

Exercice 4

Dans un jury de baccalauréat série C session 2020, un professeur a relevé la note x_i de SVT et la note y_j de mathématiques de 10 candidats. Les résultats obtenues se présentent comme suit :

x_i	1	3	4	6	8	9	11	14	13	13
y_j	1	2	4	4	5	7	8	9	12	14

1. Représenter le nuage de points de cette série statistique.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de y en x :
   a. la méthode des moindres carrées ;
   b. la méthode de Mayer.
3. Calculer le coefficient de corrélation de linéaire et donne une interprétation du résultat.
4. Les études statistiques ont montré que l'échantillon des 10 candidats choisis est représentatif de la population formée par les candidats de ce jury.
   a. peut-on estimer la note de mathématiques d'un candidat ayant obtenu 12 en SVT ?
   b. Quelle est la note de SVT d'un candidat ayant obtenu 13 en mathématiques ?

Séquence 3 Dénombrement

1. Compléments sur les ensembles

Définition : Ensemble fini

On appelle **ensemble fini** tout ensemble dont le nombre d'éléments est un nombre entier naturel.
Le nombre n d'éléments d'un ensemble fini E est appelé le **cardinal de E** et noté **Card(E)**.
Par convention, l'ensemble vide $\varnothing$ est fini et $\mathrm{Card}\varnothing = 0$.

Exemple 1.1

On donne : $A = \{0, 2, 5, 14, 78\}$ et $B = \{1, 2, 3, 5, 10, 14, 15, 19, 20, 47\}$. A et B sont des ensembles finis tels que $\mathrm{Card}(A) = 5$ et $\mathrm{Card}(B) = 10$.

1.1. Opérations usuelles, ensemble des parties et partition d'un ensemble

Définition

Soient E un ensemble fini et A et B deux sous-ensembles de E.

- On appelle **intersection** des sous-ensembles A et B le sous-ensemble de E constitué des éléments communs à A et B.
- On appelle **réunion** des sous-ensembles A et B le sous-ensemble de E constitué des éléments communs ou non à A et B.
- On appelle **complémentaire** de A dans E le sous-ensemble de E constitué des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. Cet ensemble est noté : C_E^A.
- En général, l'ensemble des éléments de B n'appartenant pas à A est appelé **différence** de A et B et noté $B \backslash A$ ou $B - A$.
- On appelle **différence symétrique** de A et B le sous-ensemble de E noté $A \Delta B$ et défini par :

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

- On dit que les sous-ensembles A et B sont **disjoints** si leur intersection est vide.
- On appelle **ensemble des parties** de A l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles de A et noté $\mathscr{P}(A)$. Que A soit vide ou non, $\mathscr{P}(A)$ contient toujours $\varnothing$.
- On dit que des sous-ensembles de E forment une **partition** de E si ils sont tous non vides, deux-à-deux disjoints et leur réunion est égale à E.

Exemple

Soit $E = \{a, b, c, d, e, f\}$. On pose $A = \{a, f, e\}$, $B = \{b, c\}$, $C = \{d\}$ et $D = \{b, d, c\}$.

1. Déterminer C_E^A, $A \cap C$, $B \cap D$, $A \cup B$, $C \cup D$ et $A \Delta B$.
2. Montrer que les ensembles A, B et C forment une partition de E.
3. Déterminer $\mathscr{P}(A)$.

Propriété 1

Soit E un ensemble fini et $E_1, E_2, \dots, E_p$ des ensembles formant une partition de E. On a : $\text{Card}(E) = \text{Card}(E_1) + \text{Card}(E_2) + \cdots + \text{Card}(E_p)$.

Démonstration

En effet, chaque élément de E appartient à un et un seul ensemble de la partition.

Méthode.

Pour résoudre un problème de dénombrement, il peut être utile d'effectuer une partition de l'ensemble à dénombrer. Le cardinal de cet ensemble est alors la somme des cardinaux des ensembles de la partition.

Propriété 2

Soient E un ensemble fini et A et B deux sous-ensembles de E. On a :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

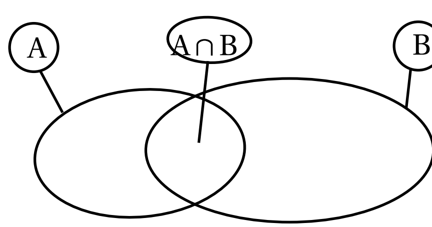
Proof.

• Si A ou B est vide, alors on a : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

• On suppose A et B sont non vide.

– Si $A \cap B = \varnothing$, alors A et B forment une partition de $A \cup B$ et donc $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.

– On suppose $A \cap B \neq \varnothing$. Alors on a : $A \cup B = A \cup (B \backslash A)$ et $A \cap (B \backslash A) = \varnothing$. Et d'après le premier point de cette démonstration, on a : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B \backslash A)$.



On a : $(A \cap B) \cup (B \backslash A) = B$. Or $(A \cap B) \cap (B \backslash A) = \varnothing$ donc d'après le point de cette démonstration, on a : $\text{Card}(B) = \text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(B \backslash A)$ et ainsi $\text{Card}(B \backslash A) = \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

En conclusion, on a : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

□

Exemple
[cf. Exemple 1, Page 254, CIAM 1e SE]
Les 50 élèves d'une classe de 1re disposent de deux options sportives, l'athlétisme et la natation. 27 élèves pratiquent l'athlétisme ; 29 élèves pratiquent la natation et 5 élèves ne pratiquent aucun des deux sports.
Déterminer le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement l'athlétisme, ceux qui pratiquent uniquement la natation et ceux qui pratiquent les deux sports.

1.2. Produit cartésien

Exemple
Pour verrouiller son sac de voyage, Bob a acheté un type de cadenas particulier, appelé cadenas combinaisons qui est constitué de trois roulettes sur chacune desquelles sont inscrits des chiffres de 0 à 9. Il choisit sa propre combinaison, un nombre de trois chiffres, de la façon suivante :
•le chiffre des centaines est choisit parmi 2, 5 et 7 ;
•le chiffre des dizaines est choisit parmi 0, 5 et 9 ;
•le chiffre des dizaines est choisit parmi 3 et 8.
Combien de possibilités a-t-il pour choisir sa combinaison ?

Définition

•E et F étant deux ensembles non vides, on appelle **produit cartésien de E par F**, l'ensemble notée $E \times F$ (se lit E croix F) et définie par :

$$E \times F = \{(x, y) | x \in E, y \in F\}.$$

•D'une manière générale, si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont n ensembles non vides ($n \geq 2$), alors

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n\}.$$

Les éléments de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ sont des listes d'éléments des ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n$.

Exemple 1.2
On considère les ensembles : $E = \{0, 1, 2, 13, 47, 51, 60, 67\}$ et $F = \{-1, 0, 1, 9, 10, 11\}$.
1. Donner deux éléments de chacun des ensembles suivants : $E \times E$, $E \times F$, $F \times E$ et $E \times F \times E$.
2. Les éléments $(0, 1)$ et $(1, 0)$ respectives des ensembles $E \times F$ et $F \times E$ sont-ils les mêmes?

Propriété 3

• E et F sont deux ensembles finis non vides. On a :

$$\mathrm{Card}(\mathrm{E} \times \mathrm{F}) = \mathrm{Card}(\mathrm{E}) \times \mathrm{Card}(\mathrm{F}).$$

• Plus généralement, si $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \dots, \mathrm{E}_n$ sont n ensembles non vides ($n \geq 2$), alors

$$\mathrm{Card}(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \cdots \times \mathrm{E}_n) = \mathrm{Card}(\mathrm{E}_1) \times \mathrm{Card}(\mathrm{E}_2) \times \cdots \times \mathrm{Card}(\mathrm{E}_n).$$

• Si E est un ensemble fin non vide de cardinal n et p un nombre entier naturel. Alors $\mathrm{Card}(\mathrm{E}^p) = n^p$ avec $\mathrm{E}^p = \mathrm{E} \times \mathrm{E} \times \cdots \times \mathrm{E}$.

Exemple

A partir de l'exemple 1.2, déterminer le cardinal de chacun des ensembles : $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$, $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$, $\mathrm{F} \times \mathrm{E}$ et $\mathrm{E} \times \mathrm{F} \times \mathrm{E}$.

2. Dénombrement des p-listes, p-arrangements, p-combinaisons

2.1. Dénombrement des p-listes

Définition

E est un ensemble non vide et p un nombre entier naturel non nul. On appelle **p-listes** d'éléments de E tout élément de l'ensemble E^p.

Exemple

On pose : $\mathrm{A} = \{1, 3, 5, 7\}$.

• Donner deux exemples de 6-listes d'éléments de A.

• Les 3-listes $(3, 5, 7)$ et $(7, 5, 3)$ sont-elles différentes?

Propriété 4

1. Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un nombre entier naturel non nul. Alors le nombre de p-listes d'éléments de E est n^p.
2. Soit E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs p et n. Le nombre d' applications de E dans F est n^p.

Exemple

A partir de l'exemple précédent, donner le nombre de 3-listes d'éléments de A possibles.

Exercice 1

Une entreprise doit commander trois voitures pour trois personnes différentes. Pour chacun des véhicules, on a le choix entre six couleurs. De combien de façons peut-on réaliser cette commande?

2.2. Dénombrement des p-arrangements

Définition

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$. On appelle **p-arrangement** d'éléments de E toute p-liste d'éléments deux à deux distincts de E.

Exemple

On pose : $\mathrm{A} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

- La 3-listes $(3, 0, 3)$ n'est pas un 3-arrangement d'éléments de A car lélément 3 se répète dans cette liste.
- $(2, 1, 4)$ est un 3-arrangement d'éléments de A. Donner deux exemples de 4-arrangement d'éléments de A.

Propriété 5

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier tel que : $1 \leq p \leq n$. Le nombre de p-arrangement d'éléments de E est le nombre A_n^p (se lit A, n, p) défini par :

$$\mathrm{A}_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1).$$

Exemple

A partir de l'exemple précédent, donner le nombre de 3-arrangements d'éléments A.

Notation. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note : $n! = \mathrm{A}_n^n$.
$n!$ est la factorielle de n.
Par convention, $0! = 1$. □

Propriété 6

Soit n et p deux nombres entiers tels que : $1 \leq p \leq n$. On a :

$$n! = n(n-1)! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\mathrm{A}_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exercice 2

Le bureau d'une association comprend un président, un secrétaire, et un trésorier choisis parmi les 27 membres de l'association. Combien de bureaux peut-on former?

2.3. Dénombrement des p-combinaisons

Définition

Soit E un ensemble non vide. Un sous-ensemble de E est un ensemble dont tous les éléments sont dans E.

Exemple

On pose : $\mathrm{A} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. $1,3,5,6$ est un sous ensemble de A. Donner deux exemples de sous-ensembles de A.

Définition

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier naturel tel que : $0 \leq p \leq n$. On appelle p-combinaison d'éléments de E, tout sous-ensemble de p éléments de E.

Exemple

On donne : $\mathrm{A} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

- Une 3-combinaison d'éléments de A est $\{1,5,8\}$.
- Donner deux exemples de 4-combinaisons de A.
- Les deux 5-combinaisons d'éléments de A suivantes : $\{1,2,3,4,5\}$ et $\{5,4,2,1,3\}$ sont-elles différentes?

Propriété 7

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier tel que : $0 \leq p \leq n$. Le nombre de p-combinaisons d'éléments de E est le nombre noté C_n^p (se lit C, n, p) et défini par :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{n!}.$$

On montre que : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Exemple

A partir de l'exemple précédent, déterminer le nombre de 5-combinaisons d'éléments de A.

Propriété 8

Soit n et p des nombres entiers naturels tels que : $p \leq n$. On a :
- $C_n^0 = 1, C_n^n = 1, C_n^1 = n$
- $C_n^p = C_n^{n-p}$
- Si $p > 0$, alors $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$.

2.4. Triangle de Pascal

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
0	1											
1	1	1										
2	1	2	1									
3	1	3	3	1								
4	1	4	6	4	1							
5	1	5	10	10	5	1						
6	1	6	15	20	15	6	1					
7	1	7	21	35	35	21	7	1				
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1			
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
$\vdots$												

Propriété 9: Formule du binôme de Newton

Soient a et b deux nombres réels. Soit n un entier naturel non nul. On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^p a^{n-k} b^k = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + \mathrm{C}_n^n b^n.$$

3. Problèmes de dénombrement

Méthode.

Soit n et p deux entiers naturels.

1. Le nombre de manières de choisir p objets parmi n objets
   Soit N le nombre de possibilités de choisir p objets parmi n.

   Choix successifs avec remise

   Si l'énoncé contient les mots **successifs avec remises** cela signifie que l'ordre dans lequel on prend les p objets choisis est **important et qu'un objet peut être pris plusieurs fois**. Le modèle mathématique approprié est la **p-liste** et on a : $\mathrm{N} = n^p$.

   Choix successifs sans remise

   Si l'énoncé contient les mots **successifs sans remise**, cela signifie que l'ordre dans lequel on prend les p objets est **important mais un objet n'est pris qu'une seule fois** (pas de répétitions). Le modèle mathématique approprié est le **p-arrangement** et on a : $\mathrm{N} = \mathrm{A}_n^p$.

   Choix simultanés

   Si l'énoncé contient le mot **simultanés**, cela signifie que l'ordre dans lequel les objets sont pris **n'est pas important** et qu'on prend un objet une seule fois (pas de répétitions). Le modèle mathématique approprié est la **p-combinaison** et on a : $\mathrm{N} = \mathrm{C}_n^p$.

2. Le nombre de manières de choisir les objets des ensembles différents revient à :
   a. choisir des objets dans un ensemble A et des éléments dans un autre ensemble B est :

   $$\mathrm{Card}(\mathrm{A}) \times \mathrm{Card}(\mathrm{B});$$

   b. choisir des éléments dans un ensemble A ou des éléments dans un autre ensemble B est :

   $$\mathrm{Card}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}).$$

Exercices

Exercice 1

Dans un jeu de 32 cartes, on veut tirer 4 cartes. Combien de possibilités a-t-on si on effectue :

1. un tirage successif et avec remise?
2. un tirage successif sans remise?
3. un tirage simultané?

Exercice 2

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12 dont 3 rouges, 4 vertes et 5 blanches. On tire, successivement et avec remise, 3 boules de cette urne.
Calculer le nombre de tirages distincts dans les deux cas suivants :

1. les trois boules tirées sont de la même couleur;
2. la première et la troisième boules tirées sont vertes.

Séquence 4 Fonctions

1. Fonctions et applications

Définition

Soit A et B deux ensembles.
- On appelle **fonction** de A vers B toute correspondance f de A vers B qui associe à chaque élément de A au plus un élément de B.
- On appelle **application** de vers A vers B toute correspondance f de A vers B qui associe à chaque élément de A un élément de B.

Vocabulaire.
- A est appelé ensemble de départ et B ensemble d'arrivée.
- Soit x et y des éléments respectifs de A et B tels que $f(x) = y$. On dit que x est l'antécédent par f de y et que y est l'image par f de x.

Définition

Soit f une fonction d'un ensemble A vers un ensemble B. On appelle **ensemble de définition** de f l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f dans B.

Remarque
Une application est une fonction dont l'ensemble de départ est son ensemble de définition.

Définition : Composition de fonctions

Soit f une fonction d'un ensemble A vers un ensemble B et g une fonction de B vers un ensemble C. On appelle **composée** de f par g, la fonction de A vers C, notée $g \circ f$ et définie pour tout élément x de A tel que $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$ par : $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$, où D_f et D_g sont les ensembles de définition respectifs de f et g.

Exemple
Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que : $f(x) = 5x - 3$ et $g(x) = 2 - x$. Calculer $g[f(x)]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 1

Exercices 8, 10(179 SM)
Exercice 2.e(67, SE)

Activité 11(70, PM)

Propriété 1

Soient f une application d'un ensemble A vers un ensemble B, g une application de B vers un ensemble C et une application de C vers un ensemble D. Les applications $f \circ (g \circ h)$ et $(f \circ g) \circ h$ sont égales.

Vocabulaire.
On dit que la composition des applications est associative.

Exercice 2

[Expression d'une fonction comme composée d'autres fonctions]
Exercices 35, 36, 37(79, SE)

Propriété 2

• La composition de deux injections est une injection.
• La composition de deux surjections est une surjection.

Exemple
Soit f l'application de $[-4,+\infty[$ vers $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ telle que : $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x+4}$.
On se propose de montrer que l'application f est bijective en utilisant les propriétés des compositions de deux injections et surjections.
Soit u une application de $[-4,+\infty[$ vers un ensemble A et v une application de A vers $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ définie par : $u(x) = x+4$ et $v(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

1. Déterminer l'ensemble A pour que l'application u soit bijective.
2. Montrer que v est bijective.
3. Montrer que $f = v \circ u$. En déduire que f est bijective.

Propriété 3

Soit f une application d'un ensemble A dans un ensemble B. f est bijective si et seulement si pour tout y élément de B, l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans A.

Exemple
Démontrer que l'application suivante est bijective et trouver sa réciproque.

$$\begin{array}{rcl} f :]1,+\infty[& \longrightarrow &]-1,+\infty[\\ x & \longmapsto & x^2-2x \end{array}$$

Propriété 4

Soit f une bijection d'un ensemble A vers un ensemble B et g une bijection de B vers un ensemble C. Alors l'application $g \circ f$ est bijective et sa réciproque est l'application $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exemple

On considère les applications suivantes :

$$f : \begin{array}{rcl}]0,1[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow &]-3,+\infty[\\ x & \longmapsto & 5x-3 \end{array}.$$

Démontrer que l'application $g \circ f$ est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 3

Activité 8(69, PM)

Définition

Soit A un ensemble non vide. On appelle **application identique** de A l'application de A vers A qui associe à un élément x de A l'élément x. On la note $\mathrm{I}d_{\mathrm{A}}$.

Remarque

L'application $\mathrm{I}d_{\mathrm{A}}$ est bijective.

Propriété 5

Soit f une bijection d'un ensemble vers un ensemble B. Alors l'application $f^{-1} \circ f$ est l'application identique de A et l'application $f \circ f^{-1}$ est l'application identique de B.

Exemple

On considère les applications suivantes :

$$f : \begin{array}{rcl} [-4,+\infty[& \longrightarrow & \left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right[\\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x+4} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{rcl} \left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right[& \longrightarrow & [-4,+\infty[\\ x & \longmapsto & 4x^2-4x-3 \end{array}.$$

Déterminer les applications $g \circ f$ et $f \circ g$.

Propriété 6

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, les représentations graphiques de deux bijections sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Vocabulaire.
La droite d'équation $y = x$ est appelée **première bissectrice**.
Exemple
Exercice 35(181, SM)

Définition : Image directe d'un ensemble

f est une application de A vers B et E une partie de A. On appelle image directe de E par f, l'ensemble des images par f de tous les éléments de E.

Exemple
On considère la fonction numérique d'une variable réelle f définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Vérifier si l'intervalle $[2,\ 3]$ est une partie de l'ensemble de définition de f et donner un encadrement de $f(x)$ pour tout $x \in [2,3]$. En déduire l'image directe par f de l'intervalle $[2,\ 3]$.

Définition : Image réciproque d'un ensemble

f est une application de A vers B et F une partie de B. On appelle image réciproque de F par f, l'ensemble F' des antécédents par f de tous les éléments de F.

Remarque
La définition de l'image réciproque ne nécessite pas que l'application soit bijective.
Exemple
On considère la fonction numérique d'une variable réelle f définie par : $f(x) = |x-3| - 1$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Encadrer un nombre réel x vérifiant $f(x) \in [-1,\ 2]$.
3. En déduire l'image réciproque de $[-1,\ 2]$ par f.

Exercice 4

Activité 11

2. Limites et continuité

Définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f, a et l des nombres réels. On dit que *l est la limite de f en a* ou encore *l est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a* si pour tout intervalle ouvert V de centre l, il existe un intervalle K de centre a tel que l'image $f(K \cap D_f)$ soit contenue dans V. On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Remarque

l est la limite de $f(x)$ quand x tend vers a si pour toutes les valeurs de $f(x)$ suffisamment proche de l, les antécédents x par f correspondantes sont suffisamment proche de a.

Exemple

Illustration graphique

Propriété 7: Admise

Si une fonction f est définie en un réel a et admet une limite en a, alors cette limite est égale à $f(a)$.

Définition

Une fonction est dite continue en a lorsqu'elle est définie en a et admet une limite en a égale à $f(a)$.

Exemple

Propriété 8

- Les fonctions élémentaires $x \longmapsto c$ ($c \in \mathbb{R}$), $x \longmapsto ax$ ($a \in \mathbb{R}$), $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto x^3$, $x \longmapsto \sqrt{x}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$, $x \longmapsto \cos(x)$, $x \longmapsto \sin(x)$ sont continues sur leur ensemble de définition.
- La somme, le produit ou le quotient de deux quelconques fonctions élémentaires est continue en tout point de son ensemble de définition.

Exemple

Les fonctions tangente, cotangente, polynômes et rationnelles sont continues en tout point de leur ensemble de définition.

Propriété 9: Opération sur les limites

Soient f et g deux fonctions tels que : $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim_{x\to a} g(x) = l'$ avec a, l et l' des nombres réels. Alors on a :
•$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = l + l'$;
•$\lim_{x\to a}(fg)(x) = l \times l'$;
•Si $l' \neq 0$, alors $\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{l'}$.

Propriété 10: admise *

Soit a un nombre réel, K un intervalle ouvert contenant a, f une fonction définie sur $K - \{a\}$ et non définie en a. Si g est une fonction continue en a qui coïncide avec f sur $K - \{a\}$, alors f admet une limite en a égale à $g(a)$.

Définition : Limite à gauche, limite droite

Soit a et l des nombres réels, f une fonction d'ensemble de définition D_f.
•On dit que f admet une **limite à gauche** en a égale à l lorsque la restriction g de f à $D_f \cap]-\infty, a[$ admet en a une limite égale à l. On note $\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$.
•On dit que f admet une **limite à droite** en a égale à l lorsque la restriction g de f à $D_f \cap]a, +\infty[$ admet en a une limite égale à l. $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$.

Exemple

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1 \text{ si } x < 0 \\ \sqrt{x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Calculer $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$.

Propriété 11

Soit a et l des nombres réels, f une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en a sauf éventuellement en a.
•Dans le cas où f n'est pas définie en a, f admet une limite l en a si et seulement si f admet en a, une limite à gauche et une limite à droite égales l.
•Dans le cas où f est définie en a, f admet une limite l en a si et seulement si f admet en a, une limite à gauche et une limite à droite égales $f(a)$.

Propriété 12

La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue en tout élément de $\mathbb{R}$.

Définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition un intervalle I. On dit que f est **continue** sur I si f est continue en tout élément de I.

Propriété 13: *

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle K.
•Si f et g sont continues sur K, alors $f+g$ et fg sont continues sur K.
•Si f et g sont continues sur K et pour tout $x \in$ K, $g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur K.

2.1. Limite infinie en réel

Propriété 14: admise

Soit a un nombre réel et n un entier naturel non nul.
• $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$;
• $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ sinon} \end{cases}$.

Propriété 15

Soit a et l deux nombres réels, f et g des fonctions telles que : $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$.
•Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ et $l > 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) = +\infty$.
•Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ et $l < 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) = -\infty$.
•Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ et $l > 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) = -\infty$.
•Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ et $l < 0$, alors $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) = +\infty$.

Exemple

Exercice 6, 7(91, SE)
Exercice 11 (239, SM)

2.2. Propriétés de comparaison

Propriété 16

Soit f une fonction.

•S'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur un intervalle $]a - x_0, a + x_0[$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

•S'il existe une fonction g telle que $f \leq g$ sur un intervalle $]a - x_0, a + x_0[$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Exemple

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} + \cos\frac{1}{x}\right)$.

Propriété 17: Théorème des gendarmes

Soit f une fonction. S'il existe deux fonctions g et h telles que $g \leq f \leq h$ sur un intervalle $]a - x_0, a + x_0[$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Exemple

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cos\frac{1}{x}$.

Propriété 18: Comparaison de limites

Soit f et g deux fonctions telles que $f \leq g$ sur un intervalle $]a - x_0, a + x_0[$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l'$, alors $l \leq l'$.

Remarque

On a une propriété analogue :

•lorsque x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) en remplaçant $]a - x_0, a + x_0[$ par $]A, +\infty[$ (ou$]-\infty, A[$).

•lorsque x tend vers x_0 par valeurs inférieurs (ou supérieures) en remplaçant l'intervalle $]a - x_0, a + x_0[$ par $]a, x_0[$ (ou $]x_0, b[$).

2.3. Limite à l'infinie

Propriété 19: admise

Soit c un nombre réel et n un nombre entier naturel non nul.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} c \lim\limits_{x\to+\infty} c = c$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \\ +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

Propriété 20

- La limite à l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite de son monôme de plus haut degré.
- La limite à l'infini d'une fonction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est égale à la limite du quotient du monôme du haut degré de P par le monôme du plus haut degré de Q.

Exemple

Exercice 2.a a) et b) (238, SM)

Propriété 21: Limites et opérations sur les fonctions

Consulter les pages 232, 233 et 234 de la CIAM 1re SM.

Exemple

Exercice 2.a c) (238, SM)

Exercice 1

Exercices 2.b, 2.c, 2.d (238, SM)
Exercices 7-19 (241, 242, SM)

Interprétation graphique des limites d'une fonction

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle et (C_f) sa courbe représentative dans un repère (O, I, J). Soit a et b deux réels.

- Si f est définie sur $I - \{a\}$ avec I un intervalle contenant a et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ (ou $+\infty$), alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à (C_f).
- Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, alors la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

Exemple
Illustration graphique

Séquence 5 Dérivabilité

1. Dérivabilité en un point

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert contenant un réel a.
•On appelle fonction **taux de variation** de f en a, la fonction notée T_a définie sur $\mathrm{I}-\{a\}$ par : $\mathrm{T}_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
•On dit que f est dérivable en a lorsque la fonction taux de variation de f en a admet une limite finie l en a. l est alors appelé le nombre dérivé de f en a et on note : $f'(a) = l$.

Exercice 1

Exercice 20 (106, SE)
Exercice 1.a, 1(249,262)
Activité 26 (75, PM)

Définition : Dérivabilités à gauche et à droite

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I contenant a.
• f est dérivable à gauche en a si la fonction T_a admet une limite finie l à gauche en a. l est le nombre dérivé de f à gauche en a et on note $f'_g(a) = l$.
• f est dérivable à droite en a si la fonction T_a admet une limite finie l à droite en a. l est le nombre dérivé de f à droite en a et on note $f'_d(a) = l$.

Propriété 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant a.
f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Interprétation graphique de la dérivabilité d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a et (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.
•Si f est dérivable en a, alors (C_f) admet au point $\mathrm{M}_0(a, f(a))$ une tangente d'équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

•Si f est dérivable à gauche en a, alors (C_f) admet au point $\mathrm{M}_0(a, f(a))$ une demi-tangente définie par :

$$\begin{cases} y = y = f'_g(a)(x-a)+f(a) \\ x \leq a \end{cases}.$$

•Si f est dérivable à droite en a, alors (C_f) admet au point $\mathrm{M}_0(a, f(a))$ une demi-tangente définie par :

$$\begin{cases} y = y = f'_d(a)(x-a)+f(a) \\ x \geq a \end{cases}.$$

•Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$, alors (C_f) au point $\mathrm{M}_0(a, f(a))$ une démi-tangente verticale définie par :

$$\begin{cases} x = a \\ y \geq f(a) \end{cases}.$$

•Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$, alors (C_f) au point $\mathrm{M}_0(a, f(a))$ une demi-tangente verticale définie par :

$$\begin{cases} x = a \\ y \leq f(a) \end{cases}.$$

2. Dérivabilité sur un intervalle

Séquence 6 Primitives

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle **primitive** sur I de f toute fonction F dérivable sur I telle que pour tout $x \in \mathrm{I}$, on ait : $\mathrm{F}'(x) = f(x)$.

Exemple

Démontrer que la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto x\sqrt{x}+2$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{x}$ sur $]0, +\infty[$.

Propriété 1

1. Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.
2. Soit F une primitive d'une fonction f sur un intervalle I.
   - Pour tout nombre réel k, la fonction $x \mapsto \mathrm{F}(x) + k$ est aussi une primitive de f sur I.
   - Toute primitive de f sur I est de la forme $x \mapsto \mathrm{F}(x) + k$, où k est constante réelle.
3. Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique primitive F de la fonction f sur I telle que : $\mathrm{F}(x_0) = y_0$.

Exemple

On considère la fonction $f : x \mapsto 3x^2$.

1. Justifier que f admet de primitives sur $\mathbb{R}$ et déterminer ses primitives sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $\mathrm{G} : x \mapsto x^3 + \sqrt{2} - 1$ est-elle une primitive de f sur $\mathbb{R}$?
3. Déterminer la primitive F de f qui s'annule 2.

Propriété 2

Soit F et G des primitives respectives de f et g sur un intervalle I. Alors pour tous réels a et b, la fonction $a\mathrm{F} + b\mathrm{G}$ est une primitive de la fonction $af + bg$ sur I.

Exemple

Déterminer les primitives de la fonction $f : x \mapsto 7x^4 + 3x$ sur $\mathbb{R}$.

Résolution

f étant une fonction polynôme, f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Une primitive de la fonction $x \mapsto 5x^4$ est la fonction $x \mapsto x^5$ et une primitive de la fonction $x \mapsto 2x$ est la fonction $x \mapsto x^2$.

Aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = \frac{7}{5}(5x^4) + \frac{3}{2}(2x)$.

Par conséquent, les primitives de la fonction f sont les fonctions F définie par $\mathrm{F}(x) = \frac{7}{5}x^5 + \frac{3}{2}x^2 + k$, où k est une constante réelle.

Propriété 3: Primitives usuelles

Soit f une fonction continue et I le plus grand ensemble sur lequel f est continue. Soit F une primitive de f sur I.

f	F	I
$x \longmapsto a\ (a \in \mathbb{R})$	$x \longmapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \longmapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x^n}\ (n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$	$x \longmapsto \frac{1}{(1-n)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto \sin x$	$x \longmapsto -\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos x$	$x \longmapsto \sin x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto 1 + \tan^2 x$	$x \longmapsto \tan x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exemple

Déterminer les primitives de f dans chacun des cas suivants.

1. $f(x) = 12\sqrt{3}$;
2. $f(x) = \frac{4}{x^3}$;
3. $f(x) = 2\sin x - \cos x$;
4. $f(x) = 3(1 + \tan^2 x)$.

Propriété 4

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel non nul.

1. La fonction $\frac{1}{n+1}f^{n+1}$ est une primitive sur I de la fonction $f' \times f^n$.
2. Si pour tout $x \in$ I, on a : $f(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{(1-n)f^{n-1}}$ est une primitive sur I de la fonction $\frac{f'}{f^n}$ $(n > 1)$.
3. Si pour tout $x \in$ I, on a : $f(x) > 0$, alors la fonction $\sqrt{f}$ est une primitive sur I de la fonction $\frac{f'}{2\sqrt{f}}$.

Exemple

Déterminer les primitives de f dans chacun des cas suivants.

1. $f(x) = 5x^4 + 6x - 1$;
2. $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$;
3. $f(x) = \frac{-4}{\sqrt{-4x+2}}$;
4. $f(x) = 5x\left(\frac{5}{2}x^2 - 7\right)^2$;
5. $f(x) = \frac{3x^2-2x}{(x^3-x^2)^2}$;
6. $f(x) = \cos x - 2\sin x$.

Propriété 5

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, $x \longmapsto ax+b$ une fonction affine et J l'image réciproque de I par cette fonction affine.
La fonction $x \longmapsto \frac{1}{a} f(ax+b)$ est une primitive sur J de la fonction $x \longmapsto f'(ax+b)$.

Exemple

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions $f : x \longmapsto \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ et $g : x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{2}x + 2\right)$.

Séquence 7 Suite numérique

1. Raisonnement par récurrence

Imaginons une rangée de voitures telles que :
•la première voiture est rouge ;
•derrière toute voiture rouge, il y a une voiture rouge.
Nous pouvons affirmer que la deuxième voiture est rouge, donc la troisième voiture est rouge, etc.
Par suite, toutes les voitures de la rangée sont rouges.
Dans ce raisonnement simple, gît un principe très important des mathématiques. Clairement formulé par Pascal dans son «Traité du triangle arithmétique», ce principe démonstratif est appelé, depuis Poincaré, en 1920, **raisonnement par récurrence**.

Définition

Une proposition est une affirmation (phrase, énoncé) pouvant être vraie ou fausse.

Exemple
$1+3=2$; $1+2+3+4+5=\frac{5(5+1)}{2}$; $x^2=x+1$ ($x\in\mathbb{R}$) ; $n^2>2n+1$ ($n\in\mathbb{R}$)

Méthode de raisonnement par récurrence.
Pour démontrer qu'une propose $\mathrm{P}(n)$, qui concerne un entier naturel n, est vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0, on procède en deux étapes :
•on démontre que $\mathrm{P}(n_0)$ est vraie ;
•on démontre que : pour tout entier naturel k supérieur ou égal à n_0, si $\mathrm{P}(k)$ est vraie, alors $\mathrm{P}(k+1)$ est vraie.

Exemple
Démontrer par récurrence que : pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a : $n^2>2n+1$.

Résolution
Démontrons par récurrence que : pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a : $n^2>2n+1$.
Soit la proposition $\mathrm{P}(n)$: $n^2>2n+1$ avec n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
•Démontrons que P(3) est vraie.
On a : P(3) : $3^2>2\times3+1$.
On a : $3^2=9$ et $2\times3+1=7$. On a : $9>7$ donc $3^2>2\times3+1$ et ainsi on a : P(3).
•Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Supposons que $\mathrm{P}(k)$ est vraie. Montrons que $\mathrm{P}(k+1)$ est vraie.
On a : $\mathrm{P}(k)$: $k^2>2k+1$ et $\mathrm{P}(k+1)$: $(k+1)^2>2(k+1)+1$.

On a : $(k+1)^2 = k^2+2k+1$ et $2(k+1)+1 = 2k+3$.
On sait que : $k^2 > 2k+1$ donc $k^2+2k+1 > 4k+2$.
Or $(4k+2)-(2k+3) = 2k-1$ et $2k-1 > 0$ puisque $k \geq 3$. Donc $4k+2 > 2k+3$.
D'où $k^2+2k+1 > 2k+3$ et ainsi on a : $(k+1)^2 > 2(k+1)+1$.
Par suite, on a : $\mathrm{P}(k+1)$.
En somme, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a : $\mathrm{P}(n)$.

2. Suites numériques

Définition

Une **suite numérique** est toute fonction d'une partie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

Remarque
L'ensemble de définition d'une suite numérique est l'ensemble des nombres entiers naturels supérieur ou égaux à un nombre entier naturel donné.
Vocabulaire.
Soit la suite numérique d'ensemble de définition E suivante :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n) \end{aligned}$$

.
• On u_n l'image par u de n et l'appelle *terme général* de la suite : c'est le *terme d'indice n*.
• La suite u se note $(u_n)_{n\in \mathrm{E}}$ ou (u_n) s'il n'y a pas dambiguïté.
• Soit n_0 le plus petit élément de E.
– u_{n_0} est appelé le *premier terme* de la suite $(u_n)_{n\in\mathrm{E}}$
– u_n est le terme de *rang* $(n-n_0+1)$ et le terme de rang n est u_{n+n_0-1}.

Exemple
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \frac{n+2}{(n-1)n}$.
1. Préciser l'ensemble de définition de la suite.
2. Quel est le premier terme de cette suite ?
3. Déterminer le 10-terme terme de la suite.
4. Déterminer le rang du terme $\frac{4}{77}$.

Remarque
Une suite peut être définie soit une **formule de récurrence** soit par une **formule explicite**.
• Une suite $(u_n)_{n\in\mathrm{E}}$ est définie par une formule explicite s'il existe une fonction f numérique d'une variable réelle définie sur un ensemble contenant E telle que : pour tout $n \in \mathrm{E}$, on a : $u_n = f(n)$.

• Une suite $(u_n)_{n\in E}$ est définie par une formule de récurrence s'il existe une fonction f numérique d'une variable réelle définie sur un ensemble contenant E telle que : pour tout $n \in E$, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$ et u_{n_0} est un réel donné.

Exemple

1. Calculer le terme de rang 5 de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = -2n+3$.
2. Calculer le terme de rang 5 de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = -2u_n + 1,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

3. Représentation graphique d'une suite numérique

Une suite numérique peut être représentée soit sur un axe soit dans le plan.

1. L'ensemble des points M_n d'abscisse u_n avec $n \in E$ est une représentation graphique de la suite numérique $(u_n)_{n\in E}$ sur un axe de repère (O, I).
2. • L'ensemble des points M_n de coordonnées (n, u_n), $n \in E$ est une représentation paramétrique de la suite numérique $(u_n)_{n\in E}$ définie par une formule explicite dans le plan muni du repère (O, I, J).
   • L'ensemble des points M_n de coordonnées (u_n, u_{n+1}), $n \in E$ est une représentation paramétrique de la suite numérique $(u_n)_{n\in E}$ définie par une formule de récurrence dans le plan muni du repère (O, I, J).

Exemple

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Représenter sur l'axe de repère (O, I) puis dans le repère (O, I, J), la suite numérique définie :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1+2u_n}{u_n} \end{cases}.$$

4. Etude d'une suite numérique

Définition : Minoration, majoration

Soit $(u_n)_{n\in E}$ une suite numérique.

• $(u_n)_{n\in E}$ est **minorée** s'il existe un nombre réel m tel que, pour tout $n \in E$, on a : $u_n \geq m$.

• $(u_n)_{n\in E}$ est **majorée** s'il existe un nombre réel M tel que, pour tout $n \in E$, on a : $u_n \leq M$.

• $(u_n)_{n\in E}$ est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple
Montrer que la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n}{1+n}$, est bornée.

Propriété 1: Sens de variation

Soit $(u_n)_{n\in E}$ une suite numérique.
• Si pour tout $n \in E$, on a : $u_n \leq u_{n+1}$, alors la suite $(u_n)_{n\in E}$ est **croissante**.
• Si pour tout $n \in E$, on a : $u_n \geq u_{n+1}$, alors la suite $(u_n)_{n\in E}$ est **décroissante**.
• Si pour tout $n \in E$, on a : $u_n = u_{n+1}$, alors la suite $(u_n)_{n\in E}$ est **constante**.

Exemple
Etudier le sens de variation de la suite numérique (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n - \sqrt{n+1}.$$

5. Notion de convergence

Définition

• Une suite est **convergente** si elle admet une limite finie.
• Une suite est **divergente** si elle n'est pas convergente.

Propriété 2

• Toute suite décroissante et minorée est convergente.
• Toute suite croissante et majorée est convergente.

Exemple
On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n\sqrt{u_n} \end{cases}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geq 0$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. Etudier la convergence de la suite (u_n).

Propriété 3

Soit (u_n) une suite numérique définie par $u_n = f(n)$ avec f une fonction numérique. Si f a une limite en $+\infty$, alors u_n a une limite et on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Remarque

Si la fonction f n'admet pas de limite en $+\infty$, on ne peut rien conclure quant à la convergence de la suite (u_n) définie par : $u_n = f(n)$.

Exemple

Etudier la convergence de la suite numérique (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3n^2+1}{5n^2+n+1}$.

6. Suites arithmétiques, suites géométriques

6.1. Suites arithmétiques

Définition

Soit $(u_n)_{n\in \mathrm{E}}$ une suite numérique.
On dit que (u_n) est une suite **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que pour tout $n \in \mathrm{E}$, on a : $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre réel r est appelé **raison** de la suite (u_n).

Propriété 4

Soit $(u_n)_{n\in \mathrm{E}}$ une suite arithmétique de premier terme u_{n_0} et de raison r. Alors pour tout $n \in \mathrm{E}$, on a : $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$.

Propriété 5

La somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit par n de la demi-somme des termes extrêmes.

6.2. Suites géométriques

Définition

Soit $(u_n)_{n\in \mathrm{E}}$ une suite numérique.
(u_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que, pour tout $n \in \mathrm{E}$, on a : $u_{n+1} = qu_n$.
Le nombre q est appelé **raison** de la suite(u_n).

Propriété 6

Soit $(u_n)_{n\in E}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0}. Alors pour tout $n \in E$, on a $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$.

Propriété 7

Soit S la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme a et de raison q. Si $q \neq 1$, alors on a : $S = a\frac{1-q^n}{1-q}$.
Si $q = 1$, alors on a : $S = na$.

Propriété 8: Limite de la suite géométrique (q^n)

Soit q un nombre réel strictement positif.
•Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
•Si $q > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
•Si $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Exercices

Exercices 1, 2, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27(297-298, SM)
Activités $2k$ avec $k \in [1,13] \cap \mathbb{N}$ (84-88, PM)

Situation d'apprentissage 3

Lieux géométriques dans le plan

Séquence 1 Angles orientés et trigonométrie

1. Angles orientés

Le plan orienté est muni du repère orthonormé (O,I,J) direct. (C) est le cercle trigonométrique.

1.1. Angle orienté et mesure principale

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, X et Y deux points du plan tels que $\overrightarrow{OX} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OY} = \vec{v}$.
Soit M et N les points d'intersection respectifs des demi-droites [OX) et [OY) avec un cercle de centre O.

- L'ensemble des couples $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs non colinéaires pour lesquels l'arc $\widehat{MN}$ garde la même mesure et est parcouru dans de M vers N est appelé **angle orienté** et noté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.
- L'ensemble des couples $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs colinéaires et de même sens est appelé **angle orienté nul**.
- L'ensemble des couples $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs colinéaires et de sens contraires est appelé **angle orienté plat**.

Vocabulaire.

- Le couple de vecteur $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ est un **représentant** de l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.
- Les angles orientés $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$ sont dits **opposés**.

Exemple

ABCD est un parallélogramme de centre O.

- $(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{DO}})$ est un angle orienté.
- $(\widehat{\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DB}})$ est l'angle orienté nul.
- $(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}})$ est un angle orienté plat.
- $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}})$ sont des angles orientés égaux.
- $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}})$ sont des angles orientés égaux.

1.2. Orientation du plan

Orienter le plan, c'est convenir que tous les cercles seront orientés dans le même sens. Ce sens est appelé **sens direct** (ou **positif**, ou **trigonométrique**). Le sens contraire est appelé **sens indirect** (ou **négatif**, ou **rétrograde**).

On choisit en générale comme sens direct le sens inverse des aiguilles d'une montre.

1.3. Mesure principale d'un angle orienté

Définition

Soit $(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$ un angle orienté. Soit M et N les points d'intersection respectifs des demi-droites [OX) et [OY) avec un cercle de centre O. La **mesure principale** en radian de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$, notée $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$, est définie par :

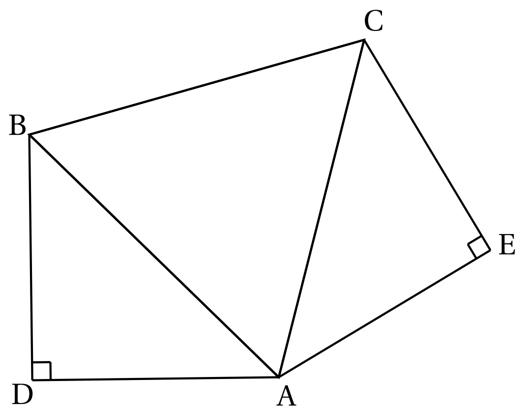
- si $(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$ est l'angle orienté nul, alors $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}} = 0$;
- si $(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$ est l'angle orienté plat, alors $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}}) = \pi$;
- si $(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}})$ n'est ni nul ni plat, alors
  - $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}}) = \mathrm{mes}(\widehat{XOY})$ lorsque le sens du déplacement de M vers N sur l'arc $\widehat{MN}$ est le sens direct ;
  - $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OX},\overrightarrow{OY}}) = -\mathrm{mes}(\widehat{XOY})$ lorsque le sens du déplacement de M vers N sur l'arc $\widehat{MN}$ est le sens indirect.

Remarque

La mesure principale d'un angle orienté est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi,\pi]$.

Exemple

On considère la figure ci-dessous. ABC est un triangle équilatérale, ACE est un triangle isocèle rectangle en E, ADB est un triangle isocèle rectangle en D et AD = AE.



Donner une mesure des angles orientés : mes$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$, mes$(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})$ et mes$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})$.

1.4. Congruence modulo 2π dans $\mathbb{R}$

Définition

Soit x et y deux nombres réels. On dit que x est **congru** à y **modulo** 2π si il existe un entier relatif k tel que : $x - y = 2\pi \times k$.

Exemple

Exercice 1.b (26)

Propriété 1

Soit x, y et z des nombres réels. Alors on a :

$$x \equiv y[2\pi] \iff x + z \equiv y + z[2\pi].$$

1.5. Mesure d'un angle orienté

Définition

Soit $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$ un angle orienté et α sa mesure principale. On appelle mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$ tout nombre réel β tel que $\beta \equiv \alpha[2\pi]$.

Notation

•L'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$ de mesure α sera noté $\widehat{\alpha}$.

•L'angle orienté nul et l'angle orienté plat seront notés respectivement $\widehat{0}$ et $\widehat{\pi}$.

Exemple
Exercice 1.a (26)

Définition

Soit $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ deux angles orientés de mesures respectifs α et β. On appelle somme des angles orientés $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$, et on note $\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}$, l'angle orienté dont l'une des mesures est $\alpha+\beta$.

Exemple
Donner une mesure de la somme des angles orientés $\widehat{\frac{\pi}{7}}$ et $\widehat{\pi}$. En déduire une mesure principale cet angle.

Propriété 2: Relation de Chasles

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls. On a :

$$(\widehat{\vec{u},\vec{v}})+(\widehat{\vec{v},\vec{w}})=(\widehat{\vec{u},\vec{w}}).$$

Exemple
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs tels que : $\text{mes}(\widehat{\vec{u},\vec{v}})\equiv\frac{3\pi}{5}[2\pi]$ et $\text{mes}(\widehat{\vec{w},\vec{v}})\equiv-\pi[2\pi]$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ?

Propriété 3

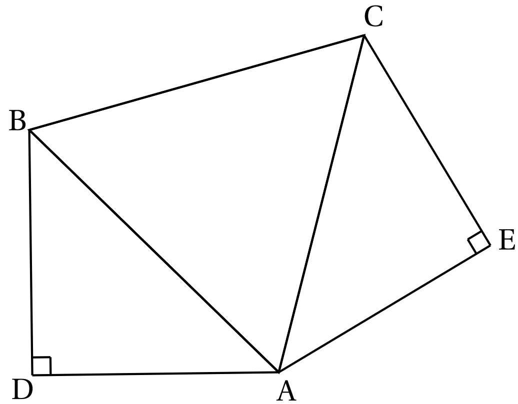
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ quatre vecteurs non nuls. On a :

$$(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=(\widehat{\vec{u}',\vec{v}'})\iff(\widehat{\vec{u},\vec{u}'})=(\widehat{\vec{v},\vec{v}'}).$$

Propriété 4

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Soit k un nombre réel non nul. On a :
• $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=-(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$;
• Si $k>0$, alors $(\widehat{k\vec{u},\vec{v}})=(\widehat{\vec{u},k\vec{v}})=(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$;
• Si $k<0$, alors $(\widehat{k\vec{u},\vec{v}})=(\widehat{\vec{u},k\vec{v}})=(\widehat{\vec{u},\vec{v}})+\pi$;
• $(\widehat{k\vec{u},k\vec{v}})=(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

Exemple
On considère la figure ci-dessous. ABC est un triangle équilatérale, ACE est un triangle isocèle rectangle en E, ADB est un triangle isocèle rectangle en D et AD = AE.



On suppose que $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{3}$. Déterminer la mesure principale des angles : $\text{mes}(\widehat{2\overrightarrow{AC}, 3\overrightarrow{AB}})$, $\text{mes}(\widehat{-3\overrightarrow{AC}, 2\overrightarrow{AB}})$ et $\text{mes}(\widehat{-5\overrightarrow{AC}, -4\overrightarrow{AB}})$.

2. Trigonométrie

2.1. Lignes trigonométriques d'un angle orienté

Définition

Soit $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ un angle orienté de mesure α et M l'image de α sur le cercle trigonométrique.
•Le cosinus de $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ ou de α est l'abscisse du point M.
•Le sinus de $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ ou de α est l'ordonnée du point M.

Propriété 5

Soit α un nombre réel. On a :
•$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$;
•$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$;
•$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

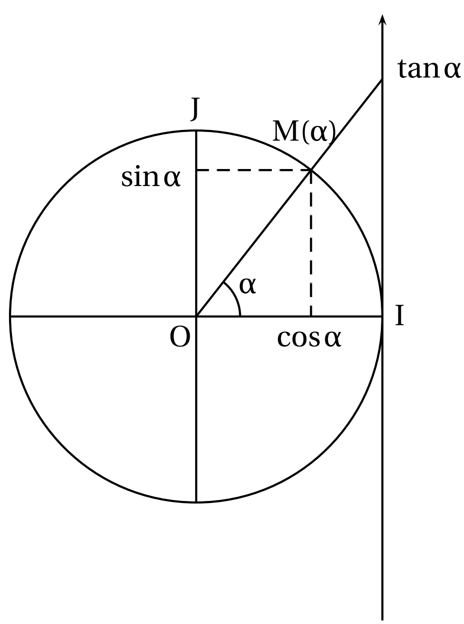
Propriété 6

Soit $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ un angle orienté non droit de mesure α. La tangente de $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ ou de α est le nombre réel, noté $\tan(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ ou $\tan\alpha$, défini par :

$$\tan(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Propriété 7

Soit α un nombre qui ne peut écrire sous la forme $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
On a : $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.



Vocabulaire.

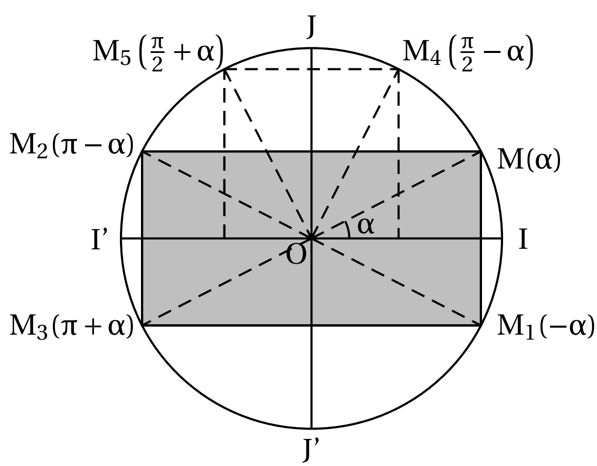
$\cos\alpha$, $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$ sont appelés **lignes trigonométriques** de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$ ou du nombre réel α.

Propriété 8

Soit α un nombre réel. On a :

- $\begin{cases} \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \end{cases}$;
- $\begin{cases} \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha \\ \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha \end{cases}$;
- $\begin{cases} \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha \\ \sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha \end{cases}$;
- $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha \end{cases}$;
- $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha \end{cases}$.

Démonstration



Les coordonnées de M_2 sont $(\cos(\pi-\alpha), \sin(\pi-\alpha))$. En considérant le triangle $OI'M_2$ rectangle en I', on a :

$\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\widehat{\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OI'}}) = -\cos\alpha$;

$\sin(\pi-\alpha) = \sin(\widehat{\overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{M_2M}}) = -\sin\alpha$

Exemple

Exercices 3.a, 3.c(36, SM)

2.2. Formules de trigonométrie

Propriété 9: Formules d'addition

Soient a et b deux nombres réels. On a :

• $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;
• $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$;
• $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$;
• $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

Exemple
Exercice 3.b (36, SM)

Propriété 10: Formules de duplication et linéarisation

Soit a un nombre réel. On a :

• $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$;
• $\sin 2a = 2\sin a \cos a$;
• $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$;
• $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$.

Exemple
Exercices 3.e, 3.f (36, SM)

Exercice 1

[Linéarisation]

1. Soit a et b deux réels. Justifier les égalités suivantes :
   a. $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$;
   b. $\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$;
   c. $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$.
2. Soit x un nombre réel.
   a. Démontrer que $\cos^5 x = \frac{5}{8}\cos x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{1}{16}\cos 5x$.
   b. Linéariser $\sin^5 x$.
   c. Linéariser $\sin^2 x \cos^5 x$.

Exercice 2

Soit a un nombre réel tel que $\tan\frac{a}{2}$ soit défini. On pose : $t = \tan\frac{a}{2}$.
Démontrer les propositions suivantes :

1. $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$;
2. $\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$;
3. si $\tan a$ est défini, alors $\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$.

2.3. Fonctions circulaires

Définition

• La fonction qui à un nombre réel x, associe le nombre réel $\cos x$ est la fonction cosinus.
• La fonction qui à un nombre réel x, associe le nombre réel $\sin x$ est la fonction sinus.
• La fonction qui à un nombre réel x, associe le nombre réel $\frac{\sin x}{\cos x}$ est la fonction tangente.

Remarque

• La fonction cosinus est une fonction paire.
• La fonction sinus est une fonction impaire.
• La fonction tangente est une fonction impaire.

Définition : Fonction périodique

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f. On dit que f est une fonction **périodique** de période p, un nombre réel strictement positif, si pour tout élément x de D_f, on a : $x-p$ élément de D_f et $f(x-p)=f(x)$.

Exemple

Les fonctions cosinus, sinus et tangente sont périodiques de période 2π.

Propriété 11

On a :
• $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$;
• $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$;
• $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.

Exemple

Exercice 14 (242, SM)

2.4. Equation et inéquation trigonométriques dans $\mathbb{R}$

Propriété 12

• Pour tout nombre réel t élément de $[-1,1]$, il existe un nombre réel a de $]-\pi,\pi]$ tel que $\sin a = t$.
• Pour tout nombre réel t élément de $[-1,1]$, il existe un nombre réel a de $]-\pi,\pi]$ tel que $\cos a = t$.
• Pour tout nombre réel t, il existe un nombre réel a de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan a = t$.

Démonstration

- Soit $t \in [-1,1]$. Démontrons qu'il existe un nombre réel a élément $]-\pi,\pi]$ tel que $\sin a = t$.
  Soit M un point de (C) d'ordonnée t. Alors $\sin(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}) = t$.
  Soit a la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})$. On a : $a \in]-\pi,\pi]$ et $\sin a = t$.
- Soit $t \in [-1,1]$. Démontrons qu'il existe un nombre réel a élément $]-\pi,\pi]$ tel que $\cos a = t$.
  Soit M un point de (C) d'abscisse t. Alors $\cos(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}}) = t$.
  Soit a la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})$. On a : $a \in]-\pi,\pi]$ et $\cos a = t$.
- Soit t un nombre réel. Démontrons qu'il existe un nombre réel a de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan a = t$.

Propriété 13

Soient x et a deux nombres réels. On a :

$$\cos x = \cos a \iff x = a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = -a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple

Résoudre l'équation $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$.

Propriété 14

Soient x et a deux nombres réels. On a :

$$\sin x = \sin a \iff x = a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = \pi - a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple

Résoudre l'équation $\sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right) = 1$.

Exercice 3

Soit la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tan x \end{aligned}.$$

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

Propriété 15

Soient x et a deux nombres réels tels que $\tan x$ et $\tan a$ soient définis. On a :

$$\tan x = \tan a \iff x = a + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple

Résoudre l'équation $\tan x = 1$ dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 4

[Equation de la forme $a\cos x + b\sin b + c = 0$] Résoudre les équations suivantes : $\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 1$ et $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x = -2$.

Résolution

• Résolvons l'équation $\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 1$.

On a : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 1 &\iff \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x = 1\\
&\iff \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos 0\\
&\iff \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 0\\
&\iff x - \frac{\pi}{3} \equiv 0[2\pi] \text{ ou } x - \frac{\pi}{3} \equiv 0[2\pi]\\
&\iff x - \frac{\pi}{3} \equiv 0[2\pi]\\
&\iff x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 1$ sont les nombres réels de la forme : $\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

• Résolvons l'équation $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x = -2$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x = -2 &\iff \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = -1\\
&\iff \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \cos\pi\\
&\iff \cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \cos\pi\\
&\iff \cos(\frac{\pi}{4} + x) = \cos\pi\\
&\iff \frac{\pi}{4} + x \equiv \pi[2\pi] \text{ ou } \frac{\pi}{4} + x \equiv -\pi[2\pi]\\
&\iff x \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{-5\pi}{4}[2\pi]
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x = -2$ sont les nombres réels ayant l'une des formes suivantes : $\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$ et $-\frac{5\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

2.5. Inéquations trigonométriques

La résolution d'inéquations trigonométriques est moins méthodique que celle des équations.
Une bonne approche consiste en général à résoudre l'équation correspondante puis d'identifier les solutions sur le cercle trigonométrique.

2.6. Inéquation de type $\cos x \geq a$

Soit a un nombre réel. L'inéquation $\cos x \geq a$ admet de solutions si et seulement si $a \in]-\infty, 1]$.

Exercice 5

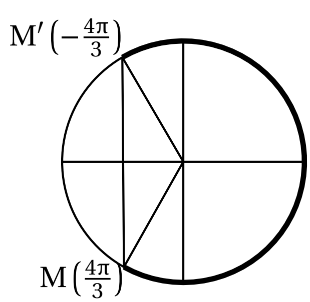
Résoudre l'inéquation $\cos x \geq -\frac{1}{2}$.

Résolution

Résolvons l'inéquation $\cos x \geq -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\cos x = -\frac{1}{2} &\iff \cos x = -\cos\frac{\pi}{3}\\ &\iff \cos x = \cos\frac{4\pi}{3}\\ &\iff x \equiv \frac{4\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{4\pi}{3}[2\pi]\end{aligned}$$

Soit M et M' les images respectives de $\frac{4\pi}{3}$ et $-\frac{4\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.



Les solutions de l'inéquation $\cos x \geq -\frac{1}{2}$ sont les mesures angles orientés dont les images sont sur l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{MM'}}$. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos x \geq -\frac{1}{2}$ est la réunion des intervalles de la forme $\left]\frac{4\pi}{3}+2k\pi, \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6

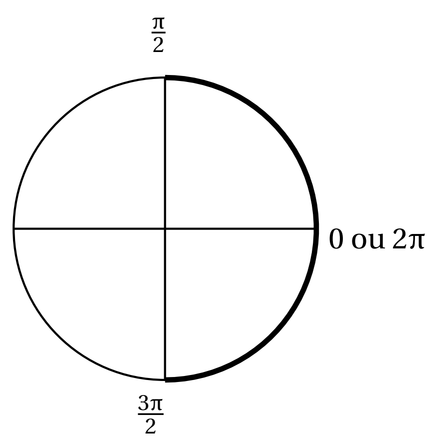
Résoudre dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ les inéquations $\cos 4x \geq 0$ et $\cos 4x < 0$.

Résolution

• Résolvons dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation $\cos 4x \geq 0$.
Posons $u = 4x$ avec $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors $x = \frac{1}{4}u$ avec $u \in [0, 2\pi]$.
Résoudre $\cos 4x \geq 0$ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ revient à résoudre d'abord $\cos u \geq 0$ dans $[0, 2\pi]$ et déduire de son ensemble de solutions celui de $\cos 4x \geq 0$ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sachant que $x = \frac{1}{4}u$.

$$\begin{aligned}\cos u = 0 &\iff \cos u = \cos\frac{\pi}{2}\\ &\iff u \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ ou } u \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{aligned}$$

Dans $[0, 2\pi]$, les solutions de $\cos u = 0$ sont $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.



Dans $[0, 2\pi]$ l'ensemble des solutions de $\cos u \geq 0$ est $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Donc dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'ensemble des solutions de $\cos 4x \geq 0$ est $\left[0, \frac{\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right]$.

• Résolvons dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation $\cos 4x < 0$.
Posons $u = 4x$ avec $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors $x = \frac{1}{4}u$ avec $u \in [0, 2\pi]$.
Dans $[0, 2\pi]$, l'ensemble des solutions de $\cos u = 0$ est $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$. Donc dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'ensemble des solutions de $\cos 4x = 0$ est $\left]\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right[$.

Exercices

Exercices 1-7, 11, 12, 13 (43, SM)
Exercice 15 (242, SM)

Séquence 2 Barycentre

1. Barycentre de deux, trois ou quatre points pondérés

Définition

- On appelle **point pondéré** tout couple (A, a) où A est un point et a un nombre réel ; a est appelé **coefficient** du point A.
- Soit $n \in \{2, 3, 4\}$. Soit $(A_1, a_1), \ldots, (A_n, a_n)$ n points pondérés tels que $\sum_{k=1}^{n} a_k \neq 0$.

  On appelle **barycentre** des points pondérés $(A_1, a_1), \ldots, (A_n, a_n)$ l'unique point G tel que : $a_1\overrightarrow{GA_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}$. On note $G = \text{bar}\{(A_1, a_1), \ldots, (A_n, a_n)\}$.

Vocabulaire.
Lorsque les coefficients $a_1, \ldots, a_n$ sont égaux, on dit que G est l'*isobarycentre* des points $A_1, \ldots, A_n$.

Exemple
ABCD est un quadrilatère.

1. Construire les points G_1, G_2 et G_3 tels que : $G_1 = \text{bar}\{(A, -1), (C, -2)\}$, $G_2 = \text{bar}\{(A, -1), (C, -2), (B, 3)\}$ et $G_3 = \text{bar}\{(A, -2), (B, -1), (C, -2), (D, 2)\}$.
2. Construire l'isobarycentre des points A, B, C et D.

Propriété 1: Homogénéité du barycentre

Soit $n \in \{2, 3, 4\}$. Le barycentre de n points pondérés est inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre réel non nul.

Exemple
ABC est un triangle. Construire le point $G = \text{bar}\left\{(A, -2), (B, 1), (C, \frac{1}{2})\right\}$.
En déduire $H = \text{bar}\{(A, 4), (B, -2), (C, -1)\}$.

Propriété 2: Associativité du barycentre

Soit $n \in \{3, 4\}$. Le barycentre de n points pondérés est inchangé lorsqu'on remplace une partie de cet ensemble par son barycentre affecté de la somme des coefficients des points qui figurent dans cette partie.

Exemple
ABCD est un carré.

1. Construire l'isobarycentre E des points A et B puis l'isobarycentre F des points A, B et C.
2. En déduire la construction du centre O du carré ABCD.

Propriété 3

Le plan est muni d'un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Soit $n \in \{2,3,4\}$. Soit G le barycentre des points pondérés $(A_1, a_1), \ldots, (A_n, a_n)$.
Soit $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ les couples de coordonnées respectifs des points $A_1, \ldots, A_n$.
Alors le couple de coordonnées de G est $\left(\frac{a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n}{a_1 + \cdots + a_n}, \frac{a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n}{a_1 + \cdots + a_n}\right)$.

Exemple
ABC est un triangle rectangle. Dans le repère (A, B, C), déterminer les coordonnées du centre de gravité de G.

2. Utilisations du barycentre

2.1. Réduction des sommes vectorielle et scalaire

Exercice 1

On considère le carré ABCD. Soit M un point du plan $\mathscr{P}$ muni du repère (A, B, C).
1. Construire le barycentre G des points pondérés $(A, 2)$, $(B, -3)$, $(C, 1)$ et $(D, 1)$.
2. Montrer que le vecteur $2\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ est indépendant du point M.
3. Calculer le nombre réel $2\overrightarrow{MA}^2 - 4\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MD}^2$.

Exercice 2

[23 (21, SM)]

Exercice 3

[33 (22, SM)]

2.2. Problèmes d'alignement et concours

Exercice 4

[15 (21, SM)]

Exercice 5

[17 (21, SM)]

2.3. Lignes de niveau

Définition

Soit k un nombre réel et f une application du plan $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}$. On appelle **ligne de niveau** k de f, l'ensemble (E_k) des points M tels que : $f(M) = k$.

Exemple

AB est segment de longueur 4. Soit f l'application du plan $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}$ qui associe à un point M de $\mathscr{P}$, le nombre $MA^2 + MB^2$.

1. Soit I l'isobarycentre des points A et B. Montrer pour tout point M de $\mathscr{P}$, on a : $f(M) = 2MI^2 + 8$.
2. Déterminer et construire les lignes de niveau 8, 10 et 12 de f.

Exercice 6

[20 (21, SM)]

Exercice 7

[22 (21, SM)]

Exercice 8

On donne trois points A, B, C distincts non alignés du plan et on note a, b, c les longueurs des côtés du triangle ABC : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

On se propose d'étudier l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

1. Soit G l'isobarycentre du triangle ABC et soit I le milieu du segment [BC].
   a. Calculer $AB^2 + AC^2$ en fonction de AI^2 et de BC^2. En déduire : $AG^2 = \frac{1}{9}(-a^2 + 2b^2 + 2c^2)$. Ecrire de même les expressions de BG^2 et de CG^2.
   b. Montrer que : $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.
2. Déterminer l'ensemble (E).

3. On choisit $a = 5, b = 4, c = 3$. Placer les trois points A, B, C et dessiner (E).

Exercices

Exercices 1-5, 6, 8, 9-13(20, SM)

Séquence 3 Orthogonalité, droite et cercle dans le plan

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Orthogonalité et droites du plan

Propriété 1

• Pour toute droite d'équation cartésienne : $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, le vecteur $\vec{n}(a, b)$ est un vecteur normal de cette droite.
• Toute droite de vecteur normal $\vec{n}(a, b)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.

Propriété 2

Soit (D) et (D′) deux droites d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.
On a :
• $(D) \parallel (D') \iff ab' - a'b = 0$;
• $(D) \perp (D') \iff aa' + bb' = 0$.

Exercice 1

Soit $\vec{u}(a, b)$ un vecteur non nul. Déterminer un vecteur unitaire $\vec{i}$ colinéaire à $\vec{u}$.

Propriété 3

Soit (D) une droite, $\vec{n}$ un vecteur normal de (D) et θ une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{i}, \vec{n}})$, (D) admet une équation cartésienne de la forme $(\cos\theta)x + (\sin\theta)y + k = 0$ avec k une constante réelle.
Une telle équation est appelé **équation normale à (D)**.

Propriété 4

Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan et (D) une droite d'équation normale $(\cos\theta)x + (\sin\theta)y + k = 0$. On a :

$$d(M_0, (D)) = \left|(\cos\theta)x_0 + (\sin\theta)y_0 + k\right|.$$

Remarque
On remarque que $d(O,(D)) = |k|$.
Le réel k est la distance algébrique d'origine à la droite (D).

2. Cercles

2.1. Représentation paramétrique d'un cercle

Définition

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon r. Le système $\begin{cases} x = r\cos\theta, \theta \in \mathbb{R} \\ y = r\sin\theta, \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$ est appelé **représentation paramétrique** du cercle $(\mathscr{C})$.

Définition

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre $A(a,b)$ et de rayon r. Le système $\begin{cases} x = a + r\cos\theta, \theta \in \mathbb{R} \\ y = b + r\sin\theta, \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$ est appelé **représentation paramétrique** du cercle $(\mathscr{C})$.

2.2. Tangente à un cercle

Séquence 4 Translations, symétries orthogonales et rotations

1. Translations

Propriété 1

Soit f une application du plan dans lui-même.
f est une translation si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$.

Exemple
ABC est un triangle.
Soit f l'application du plan dans le plan qui, à tout point M, associe un point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

1. Montrer que pour tout point M du plan, le vecteur $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ est indépendant de M.
2. En déduire la nature et l'élément caractéristique de f.
3. Construire $f(A)$.

Démonstration

Propriété 2

- La composée $t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{v}}$ des translations $t_{\overrightarrow{u}}$ et $t_{\overrightarrow{v}}$ respectives de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$
- Le plan étant muni d'un repère cartésien, l'expression analytique de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(a,b)$ est

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y' + b \end{cases}$$

avec $M'(x',y')$ l'image d'un point $M(x,y)$ par cette translation.

Exemple

ABCD est un carré de centre O.

1. Déterminer l'image de A par la transformation $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{AD}}$.
2. Le plan est muni du repère (A,B,C).
   a. Déterminer l'expression analytique de $t_{3\overrightarrow{OA}}$.
   b. Déterminer les coordonnées du point E, image de D par $t_{3\overrightarrow{OA}}$.

Exercice 1

ABCD est un carré de centre O.

1. Déterminer le vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que : $t_{\overrightarrow{BD}} = t_{\overrightarrow{u}} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$.
2. Construire l'image de O par $t_{\overrightarrow{u}}$.
3. Déterminer l'expression analytique de $t_{\overrightarrow{u}}$ sachant que le plan est muni du repère (O,A,B).

2. Symétries orthogonales

2.1. Décomposition d'une translation

Propriété 3

Soit (Δ) et (Δ') deux droites parallèles, O un point de (Δ) et O$'$ son projeté orthogonal sur la droite (Δ').
La composée $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$ des symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ) et (Δ') est la translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$.

Remarque

(Δ') est l'image de (Δ) par la translation de $\overrightarrow{OO'}$.

Exemple

ABCD est un carré de centre O.
Déterminer la nature et l'élément caractéristique de $s_{(BC)} \circ s_{(AD)}$.

Propriété 4: Décomposition d'une translation

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul, $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
Pour toute droite (Δ) de vecteur normal $\overrightarrow{u}$, il existe une droite (Δ') et une seule telle que : $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = t_{\overrightarrow{u}}$.

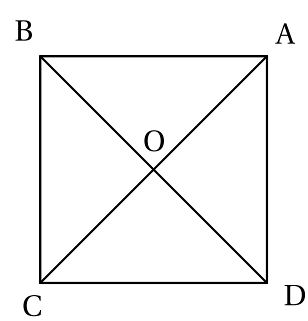
Exemple

ABCD est un carré de centre O. Déterminer les droites (Δ) et (Δ') telle que : $t_{\overrightarrow{AC}} = s_{\Delta} \circ s_{(BD)} = s_{(BD)} \circ s_{\Delta'}$.

Résolution

Déterminons les droites (Δ) et (Δ') telle que : $t_{\overrightarrow{AC}} = s_{\Delta} \circ s_{(BD)} = s_{(BD)} \circ s_{\Delta'}$.

- Soit E et F les images respectives des points B et D par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Alors la droite (EF) est l'image de la droite (BD) par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Comme $(BD) \perp (AC)$, d'après la propriété 3, on déduit que : $s_{(EF)} \circ s_{(BD)} = t_{\overrightarrow{AC}}$. De la propriété 4, on conclut que les droites (Δ) et (EF) sont confondues puisque $t_{\overrightarrow{AC}} = s_{\Delta} \circ s_{(BD)}$. Ainsi (Δ) est la droite (EF).
- Soit G et H les antécédents des points B et D par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Alors la droite (BD) est l'image de la droite (GH) par la translation vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Comme $(BD) \perp (AC)$, d'après la propriété 3, on déduit que : $s_{(BD)} \circ s_{(GH)} = t_{\overrightarrow{AC}}$. De la propriété 4, on conclut que les droites (Δ') et (GH) sont confondues puisque $t_{\overrightarrow{AC}} = s_{(BD)} \circ s_{\Delta'}$. Ainsi (Δ) est la droite (GH).



2.2. Expression analytique de quelques symétries d'axes

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.
Soit s la symétrie orthogonale d'axe (Δ). Soit $\mathrm{M}(x, y)$ un point du plan et $\mathrm{M}'(x', y')$ son image par s. Alors la droite (MM') est perpendiculaire à la droite (Δ) et le milieu du segment $[\mathrm{MM}']$ appartient à la droite (Δ).
Déterminer l'expression analytique de s dans chacun des cas suivants.

1. (Δ) est parallèle à l'axe des abscisses ;
2. (Δ) est parallèle à l'axe ordonnées ;
3. (Δ) est la bissectrice première ;
4. $(\Delta) : 2x + y - 1 = 0$.

Résolution

4. $(\Delta) : 2x + y - 1 = 0$

Soit $\mathrm{M}(x, y)$ un point du plan et $\mathrm{M}'(x', y')$ son image par s. Soit H le milieu du segment $[\mathrm{MM}']$. On a : $\mathrm{H}\left(\dfrac{x+x'}{2}, \dfrac{y+y'}{2}\right)$.

Soit $\overrightarrow{u}(1, -2)$ un vecteur directeur de (Δ).

$$s(\mathrm{M}) = \mathrm{M}' \iff \begin{cases} (\mathrm{MM}') \perp (\Delta) \\ \mathrm{H} \in (\Delta) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x' - x) - 2(y' - y) = 0 \\ 2\left(\frac{x+x'}{2}\right) + \frac{y+y'}{2} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$s(\mathrm{M}) = \mathrm{M}' \iff \begin{cases} x' - 2y' = x - 2y \\ 2x' + y' = -2x - y + 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x - 4y + 4) \\ y' = \frac{1}{5}(-4x + 3y + 2) \end{cases}$$

Donc l'expression analytique de s est :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x - 4y + 4) \\ y' = \frac{1}{5}(-4x + 3y + 2) \end{cases}.$$

3. Rotations

3.1. Composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants

Propriété 5

Soit (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en un point O, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$.
La composée $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta}$ des symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ) et (Δ') est la rotation de centre O et d'angle $2(\widehat{\vec{u}, \vec{u'}})$.

Remarque

(Δ') est l'image de (Δ) par la rotation de centre O et d'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{u'}})$.

Exemple

ABC est un triangle.
Construire l'image D de B par l'application $s_{(AB)} \circ s_{(AC)}$.

Propriété 6: Décomposition d'une rotation

Soit $r(O, \alpha)$ la rotation de centre O et d'angle de mesure principale non nulle α.
Pour toute droite (Δ) passant par O, il existe une droite (Δ') et une seule telle que $s_{\Delta'} \circ s_{\Delta} = r(O, \alpha)$.

Exemple

ABCD est un carré de centre O.
Déterminer les droites (Δ) et (Δ') telles que : $r(O, \frac{\pi}{2}) = s_{\Delta} \circ s_{(AC)} = s_{(AC)} \circ s_{\Delta'}$.

Résolution

Déterminons les droites (Δ) et (Δ') telles que : $r(O, \frac{\pi}{2}) = s_{\Delta} \circ s_{(AC)} = s_{(AC)} \circ s_{\Delta'}$.

- (Δ)

  Les points E et F désignent les images respectives des points A et C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Alors la droite (EF) est l'image de (AC) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. D'où (EF) et (Δ) sont confondues puisque $r(O, \frac{\pi}{2}) = s_{\Delta} \circ s_{(AC)}$.
- (Δ')

  Les points G et H désignent les antécédents respectives des points A et C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Alors la droite (AC) est l'image de la droite (GH) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. D'où les droites (GH) et (Δ') sont confondues $r(O, \frac{\pi}{2}) = s_{(AC)} \circ s_{\Delta'}$.

Exercice 1

Activité 2 (102, PM)

3.2. Propriété caractéristique

Propriété 7

Soit f une application du plan dans lui-même et $\widehat{\alpha}$ un angle orienté non nul.
f est une rotation d'angle α si et seulement si, pour tous points M et N distincts d'images respectives M' et N', on a : $MN = M'N'$ et $\widehat{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'})} = \widehat{\alpha}$.

Exemple

ABC est un triangle équilatéral.
Soit r l'application du plan dans lui-même qui, à un point M, associe le point M' tel que : $MA = M'B$ et $\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M'B})} = \widehat{\frac{2\pi}{3}}$.
Démontrer que r est une rotation dont on précisera les éléments caractéristique.

3.3. Composée de rotations

Propriété 8: Composée de deux rotations de même centre

Soit r et r' deux rotations de centre O et d'angles respectifs α et α'. Alors $r \circ r'$ est la rotation de centre O d'angle $\alpha + \alpha'$.

Propriété 9: Composée de deux rotations de centres distincts

Soit r et r' deux rotations de centres distincts et d'angles respectifs $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\alpha'}$.
• Si $\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha'} \neq 0$, alors $r \circ r'$ est une rotation d'angle $\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha'}$.
• Si $\widehat{\alpha} + \widehat{\alpha'} = \widehat{0}$, alors $r \circ r'$ est une translation.

Exemple

Exercice 2.d (70, CIAM)

Séquence 5 Isométrie

1. Définition et propriétés fondamentales

Définition

On appelle **isométrie** du plan toute application f du plan dans lui-même qui conserve la distance.

Pour tous points M et N d'images respectives $\mathrm{M'}$ et $\mathrm{N'}$ par f, on a : $\mathrm{MN} = \mathrm{M'N'}$.

Remarque

Les translations, les symétries orthogonales et les rotations sont des isométries .

Propriété 1: Conservation du produit scalaire

Soit f isométrie. Pour tous points A, B, C et D d'images respectives $\mathrm{A'}$, $\mathrm{B'}$, $\mathrm{C'}$ et $\mathrm{D'}$ par f, on a : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{A'B'}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{C'D'}}$.

Propriété 2: Conservation du barycentre

Soit f une isométrie, (A, a), (B, b) et (C, c) des points pondérés et $\mathrm{A'}$, $\mathrm{B'}$ et $\mathrm{C'}$ les images respectives des points A, B et C par f, G un point et G' son image par f.
G est le barycentre des points pondérés (A, a), (B, b), (C, c) si et seulement si $\mathrm{G'}$ est le barycentre des points pondérés $(\mathrm{A'}, a)$, $(\mathrm{B'}, b)$, $(\mathrm{C'}, c)$.

Propriété 3

Toute isométrie plane est une transformation et sa réciproque est une isométrie plane.

2. Isométrie et configuration

Propriété 4

Soit f une isométrie, A et B deux points distincts d'images respectives $\mathrm{A'}$ et $\mathrm{B'}$ par f.
•L'image par f de la droite (AB) et la droite $(\mathrm{A'B'})$.
•L'image par f du segment [AB] est le segment $[\mathrm{A'B'}]$.
•L'image par f de la demi-droite [AB) est la demi-droite $[\mathrm{A'B'})$.

Propriété 5

Soit f une isométrie, $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de rayon r et O′ l'image de O par f.
L'image par f du cercle $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre O′ et de rayon r.

Vocabulaire.
Une figure est dit *globalement invariante* par une transformation si elle est sa propre image par cette transformation. Ainsi, toute droite perpendiculaire à l'axe d'une symétrie orthogonale est globalement invariante par cette symétrie orthogonale.

Propriété 6: Conservation des mesures d'angles

Soit f une isométrie, ABC un triangle et A′, B′, C′ les images respectives des points A, B, C par f.
On a : $\widehat{\text{BAC}} = \widehat{\text{B}'\text{A}'\text{C}'}$.

Propriété 7: Conservation du contact

Soit f une isométrie, $(\mathscr{D})$ une droite, a un point de $(\mathscr{D})$, $(\mathscr{C})$ un cercle tangent à $(\mathscr{D})$ en A et $(\mathscr{D}')$, A′, $(\mathscr{C}')$ les images respectives de $(\mathscr{D})$, A, $(\mathscr{C})$ par f.
La droite $(\mathscr{D}')$ est tangente au cercle $(\mathscr{C}')$ en A′.

Propriété 8: Conservation des aires

Soit f une isométrie, ABC un triangle et A′, B′, C′ les images respectives des points A, B, C par f.
Les triangles ABC et A′B′C′ ont même aire.

3. Compléments sur les isométries

3.1. Composée d'isométries

Propriété 9

- La composée de deux isométries est une isométrie.
- La réciproque d'une isométrie est une isométrie.

Vocabulaire.
Un groupe de transformations du plan est un ensemble (E) de transformations tel que :

• la composée de deux éléments de (E) est un élément de (E) ;
• la réciproque d'un élément de (E) est un élément de (E).

Exemple

L'ensemble des translations est un groupe de transformations du plan mais l'ensemble des symétries orthogonales ne l'est pas.

3.2. Déplacements et antidéplacements

Définition

• Un déplacement est une isométrie qui conserve les angles orientés.
• Un antidéplacement est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé.

Exemple

Les translations et les rotations sont les déplacements et les symétries orthogonales sont des antidéplacements.

Propriété 10

Soit f et g isométries planes.
• Si f et g sont des déplacements, alors $g \circ f$ est un déplacement.
• Si f et g sont des antidéplacements, alors $g \circ f$ est un déplacement.
• Si f est un déplacement et g est un antidéplacement, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des antidéplacements.
• Si f est un déplacement, alors f^{-1} est un déplacement.
• Si f est un antidéplacement, alors f^{-1} est un antidéplacement.

Remarque

L'ensemble des déplacements est un groupe de transformations du plan mais l'ensemble des antidéplacements ne l'est pas.

3.3. Triangles isométriques

Définition

Deux triangles ABC et A′B′C′ sont isométriques si et seulement si il existe une isométrie f qui transforme les points A, B et C en les points A′, B′ et C′.

Remarque

Si f est un déplacement, alors les deux triangles sont dits *directement* superposables, sinon ils sont dits superposables *après retournement*.

Séquence 6 Homothéties

1. Homothéties

Propriété 1: Caractérisation d'une homothétie

Soit f une application du plan dans lui-même, k un nombre réel non nul différent de 1. f est une homothétie de rapport k si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M′ et N′, on a : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Propriété 2: Expression analytique d'une homothétie

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

• Soit h une homothétie de centre $A(x_0, y_0)$ et de rapport k un réel non nul différent de 1. L'expression analytique de h est :

$$\begin{cases} x' = x_0 + k(x - x_0) \\ y' = y_0 + k(y - y_0) \end{cases},$$

avec et $M'(x', y')$ l'image d'un point $M(x, y)$ du plan par h.

• Si h est une application du plan dans lui-même dont l'expression analytique est de la forme

$$\begin{cases} x' = x_0 + k(x - x_0) \\ y' = y_0 + k(y - y_0) \end{cases}, k \in \mathbb{R} - \{0, 1\},$$

alors h est l'homothétie de rapport k et de centre, le point invariant de h.

Propriété 3: Conservation du barycentre

Soit h une homothétie, (A, a), (B, b) et (C, c) des points pondérés, A′, B′ et C′ les images respectives des points A, B et C par h, G un point et G′ son image par h.
G est barycentre des points pondérés (A, a), (B, b) et (C, c) si et seulement si G′ est le barycentre des points pondérés (A', a), (B', b) et (C', c).

Propriété 4: Conservation du contact

Soit h homothétie, $(\mathscr{D})$ une droite, A un point de $(\mathscr{D})$, $(\mathscr{C})$ un cercle tangent à $(\mathscr{D})$, $(\mathscr{D}')$, A′ et $(\mathscr{C}')$ les images respectives $(\mathscr{D})$, A et $(\mathscr{C})$ par h.
La droite $(\mathscr{D}')$ est tangente au cercle $(\mathscr{C}')$ en A′.

Séquence 7 Représentation graphique de fonctions et transformations du plan

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Propriété 1

Soit f une fonction.
- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto -f(x)$ se déduit de celle de la fonction f par la symétrie orthogonale d'axe (OI).
- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(-x)$ se déduit de celle de la fonction f par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).
- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto -f(-x)$ se déduit de celle de la fonction f par la symétrie centrale de centre O.

Exemple

1. Construire la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2$.
2. Construire la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto -x^2$.
3. Construire la courbe représentative de la fonction $h : x \mapsto \frac{1}{x} + 1$.
4. Construire la courbe représentative de la fonction $j : x \mapsto \frac{1}{x} - 1$.

Propriété 2

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x-a) + b$ se déduit de celle de la fonction f par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(a, b)$.

Exemple

Construire la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto (x-2)^2 + 1$.

Exercice 1

Exercices 21, 22, 23 (180, SM)

Définition

On appelle fonction **homographique** toute fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{k}{x-a} + b$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Exemple

Exercice 24 (180, SM)

Propriété 3

La représentation graphique de la fonction homographique $f : x \longmapsto \frac{k}{x-a} + b$ se déduit de celle de la fonction $x \longmapsto \frac{k}{x}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(a, b)$.

Séquence 8 Etude de fonctions

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

1. Parité, périodicité

Définition : fonction paire

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f.
On dit que f est **paire** si D_f est symétrique par rapport à zéro et pour tout x élément de D_f, on a : $f(-x) = f(x)$.

Dans un repère orthogonal, une fonction est pair si et seulement si l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de sa courbe représentative.
Exemple
La fonction $x \mapsto x^2$ est une fonction paire.
Remarque

Lorsqu'une fonction f, d'ensemble de définition D_f, est paire, il suffit de l'étudier sur D_f l'ensemble $D_f \cap \mathbb{R}_+$.
La courbe obtenue est ensuite complétée par symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Définition : Fonction impaire

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f.
On dit que la fonction f est **impaire** si $D_f$est symétrique par rapport à zéro et pour tout $x \in D_f$, on a : $f(-x) = -f(x)$.

Dans un repère orthogonal, une fonction est impair si et seulement si l'origine du repère est un centre de symétrie de sa courbe représentative.
Exemple
Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{(x-1)(x+1)}$ est une fonction impaire.
Remarque

Lorsqu'une fonction f, d'ensemble de définition D_f, est paire, if suffit de l'étudier sur D_f l'ensemble $D_f \cap \mathbb{R}_+$.
La courbe obtenue est ensuite complétée par symétrique par rapport à l'origine du repère.

Exercice 1

Exercice 1.a (271, SM)
Exercices 1, 2, 3, 4 (280, SM)

Définition : Fonction périodique

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f et p un réel non nul.
On dit que f est **périodique, de période** p, si pour tout x élément de D_f, $x-p$ et $x+p$ appartiennent à D_f et $f(x+p)=f(x)$.

Une fonction périodique, de période p, si et seulement si sa courbe représentative est globalement invariante par la translation de vecteur $p\overrightarrow{OI}$.

Exemple

La fonction $x \longmapsto \cos x$ est périodique de période 2π.

Remarque

- Si p est une période de f, alors kp $(k \in \mathbb{Z}^*)$ est aussi période de f.
- Lorsqu'une fonction f, d'ensemble de définition D_f, est périodique de période p, il suffit de l'étudier sur un ensemble de la forme $D_f \cap [a, a+p[$.

  La courbe obtenue est ensuite complétée par en utilisant les translations de vecteurs $p\overrightarrow{OI}$ et $-p\overrightarrow{OI}$.

Exercice 2

Exercices 1.b, 1.c (271, SM)
Exercice 5 (280, SM)

2. Eléments de symétrie

Définition : Axe de symétrie

Soit f une fonction et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.
On dit qu'une droite $(\mathscr{D}) : x = a$ est un **axe de symétrie** de $(\mathscr{C})$ si pour réel h tel que $a+h \in D_f$, on a : $a-h \in D_f$ et $f(a-h) = f(a+h)$.

Exemple

L'axe des ordonnées est l'axe de symétrie de la courbe représentative d'une fonction paire.

Définition : Centre de symétrie

Soit f une fonction et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.
Le point $\mathrm{I}(a, b)$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C})$ si pour tout réel h tel que $a+h \in \mathrm{D}_f$, on a : $a-h \in \mathrm{D}_f$ et $f(a+h)+f(a-h)=2b$.

Exemple
L'origine d'un repère est le centre de symétrie de la courbe représentative d'une fonction impaire.

Exercice 1

Exercices 7, 8 (280, SM)

3. Etude de fonctions

Plan d'étude d'une fonction
Pour étudier une fonction f, en l'absence de consignes particulières, on peut adopter le plan suivant.

- Déterminer l'ensemble de définition et étudier la continuité de f en tout point de ce ensemble
- Signaler la parité ou la périodicité éventuelles de f et le cas échéant en déduire l'ensemble d'étude
- Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f, calculer sa dérivée et en déduire le sens de variation de f
- Etude des comportement de f aux bornes de l'ensemble d'étude et en déduire les éventuelles asymptotes.
- Dresser le tableau de variation f
- Tracer la courbe représentative de f, après avoir éventuellement dressé une table de valeurs.

Bibliography

[1] CIAM 1e SM, SE

[2] CIAM 2e S

[3] Sylvain AHOUANGBO, *La Passion des maths*, première édition

[4] Yvan Haine-Pierre Joris, *Synthèse de trigonométrie*, août 2012